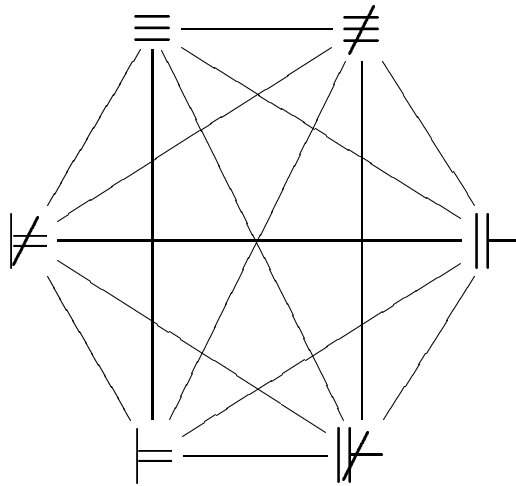


Apunts de teoria  
d'Introducció a la Lògica



Glyn Morrill

10 d'octubre de 2005

## Índex de continguts

Pròleg .....	iv
• 1. Estructures .....	1
1.1. Relacions .....	3
1.2. Operacions .....	10
1.3. Àlgebres .....	17
1.4. Estructures .....	19
• 2. Llenguatge .....	21
2.1. Termes i fórmules .....	21
2.2. Lligament .....	33
2.3. Notació .....	35
2.4. Substitució .....	40
2.5. Avaluació .....	43
• 3. Equivalència .....	45
3.1. Interpretacions diferenciadores .....	46
3.2. Connectives proposicionals .....	50
3.3. Quantificadors .....	52
3.4. Formes normals .....	53
3.5. Arbres de decisió binaris i OBDDs .....	59
3.6. Formalització .....	65
• 4. Satisfactibilitat .....	71
4.1. Models .....	71
4.2. Taulers .....	75
4.3. Unificació .....	86
4.4. Resolució .....	90
4.5. Programació lògica .....	96

• 5. Validesa .....	103
5.1. Contramodels .....	105
5.2. Deducció natural .....	108
5.3. Igualtat .....	123
5.4. Teories .....	125
Nota històrica .....	129

## Pròleg

*La lògica és la joventut de la matemàtica.*

Bertrand Russell

*És millor ser pobre i anar sense sabates  
que no pas anar sense una educació.*

dita afganesa

*Sento i oblidó,  
veig i recordo,  
faig i entenc.*

dita xinesa

Ens plantejem els objectius següents:

- Familiaritzar completament l'estudiant amb la notació i el significat exacte del llenguatge de predicats.
- Inferir comoditat en llegir i escriure les fórmules, i comprensió del que comporten.
- Comunicar els conceptes d'*equivalència* (de fórmules), de *satisfactibilitat* (de conjunts de fórmules) i de *validesa* (de seqüents).
- Fer adquirir a l'estudiant l'habilitat d'intuir informalment d'una banda i de demostrar formalment de l'altra banda aquestes propietats.

Així, la matèria consisteix en:

1. Relacions i operacions. Estructures de primer ordre.
2. Definició matemàtica de la sintaxi i la semàntica del llenguatge de la lògica de primer ordre. Avaluació d'una fórmula en una interpretació.

### 3. Equivalència de fórmules.

- Demostració de no-equivalència per la tècnica de presentar una interpretació diferenciadora.
- Demostració d'equivalència pel mètode d'interconversió sota equivalències bàsiques, per exemple via formes normals, i per transformació en diagrames de decisió binaris ordenats (OBDDs) reduïts.

### 4. Satisfactibilitat de conjunts de fórmules.

- Demostració de satisfactibilitat per la tècnica de presentar un model.
- Demostració d'insatisfactibilitat pel mètode de taulers i pel mètode de resolució.

### 5. Validesa de seqüents.

- Demostració d'invalidesa per la tècnica de presentar un contramodel.
- Demostració de validesa pel mètode de deducció natural.

Aquesta teoria es presenta amb vista a aplicacions de la lògica en la informàtica, per exemple la formalització del llenguatge ordinari en el llenguatge de predicats, l'anàlisi de programació lògica, el desenvolupament de teories, i l'anàlisi i el raonament precís sobre qüestions de disseny i especificació a partir del llenguatge de predicats.

Didàcticament, adoptem com a estratègia la presentació el més aviat possible del llenguatge de la lògica de primer ordre sencera i dels mètodes per a aquesta lògica; tradicionalment se sol presentar la lògica proposicional primer, i la lògica de predicats segon. Hi ha un nombre de raons per a la nostra decisió. Primer, al moment de cursar la nostra assignatura (al començament d'una carrera d'informàtica), els estudiants ja estant fent servir la lògica amb quantificadors i igualtat per a l'especificació de precondicions i postcondicions de programes imperatius: volem familiaritzar el més aviat possible els estudiants amb la naturalesa precisa d'aquest formalisme. Segon, en l'ordre tradicional el càlcul de predicats, amb indecidibilitat, pot semblar un desengany comparat amb el càlcul proposicional, decidible, presentat abans. La nostra presentació del càlcul proposicional com a un cas especial del càlcul de predicats amb propietats especialment bones permet apreciar el primer

enloc de lamentar el segon: l'ampolla es presenta com a mig plena enloc de mig buida. Tercer, en l'ordre tradicional hi ha molta redundància discutint quins conceptes i propietats vistos per a la lògica proposicional es conserven o es modifiquen en el càlcul de predicats. Quart, costa als estudiants bastant de temps de sentir-se còmodes amb els quantificadors: deixant això per a la segona part del curs no deixa prou temps perquè l'estudiant ho domini. És la nostra experiència de molts anys que la presentació immediata del llenguatge ple de primer ordre porta un millor rendiment que no pas la presentació tradicional.