

Entregad las respuestas a los enunciados en tres bloques separados:

Bloque A: enunciados 1,2 y 3, bloque B: enunciado 4, bloque C: enunciados 5, 6 y 7.

Para cada bloque no podéis utilizar más de 3 hojas.

Las notas de este examen y las del curso se publicaran antes del día 2 de julio de 2008. La revisión será el día 2 de julio de las 16 a 16:30 horas en el despacho 235 del edificio Omega.

---

**Exercici 1 (2 punts)** Tenemos un grafo dirigido  $G = (V, E)$  con costes en los arcos  $(c_e)_{e \in E}$  (los costes son enteros pero pueden ser negativos) y un destino  $t \in V$ . Tenemos también para cada vértice  $v \in V$  un valor finito  $d(v)$ . Alguien afirma que  $d(v)$  es el coste del camino con coste mínimo que une  $v$  con  $t$ .

1. Proporcionad un algoritmo con coste  $O(m)$  que compruebe si la afirmación es correcta.
2. Suponiendo que los valores  $d(v)$  son correctos. Proporcionad un algoritmo con coste  $O(m \log m)$  que calcule los costes de los caminos con coste mínimo a un nuevo destino  $t'$ . (Hint: puede ser útil considerar una función de coste nueva  $c'_e = c_e - d(v) + d(w)$  si  $e = (v, w)$ .)

**Exercici 2 (1 punt)** Sea  $G = (V, E)$  una red de flujo arbitraria, con un origen  $s$ , un destino  $t$ , y una capacidad entera positiva  $c_e$  en cada arco  $e$ . Determinad si los siguientes enunciados son ciertos o falsos. En caso de que lo sean, proporcionad los argumentos que lo demuestren y, en caso contrario, dad un contraejemplo.

1. Si  $f$  es un  $(s, t)$ -flujo máximo en  $G$ , entonces  $f$  satura la capacidad de todas las aristas de salida de  $s$ .
2. Sea  $(A, B)$  un  $(s, t)$ -corte con capacidad mínima en  $G$ . Sea  $G'$  la red de flujo obtenida a partir de  $G$  añadiendo 1 a todas las capacidades. Entonces,  $(A, B)$  es un  $(s, t)$ -corte con capacidad mínima en  $G'$ .

**Exercici 3 (1.5 punts)** Considerad el problema MAXSAT definido como sigue: dada una fórmula booleana en forma normal conjuntiva  $\Phi$  formada por  $m$  cláusulas sobre un conjunto de  $n$  variables. Queremos encontrar una asignación de valores a las variables que satisfaga el máximo número posible de cláusulas. Consideramos el siguiente algoritmo.

1. Sea  $k_0$  el número de cláusulas satisfechas por la asignación en la que a todas las variables se les asigna el valor falso.
2. Sea  $k_1$  el número de cláusulas satisfechas por la asignación en la que a todas las variables se les asigna el valor cierto.
3. Devolver el máximo de  $k_0$  y  $k_1$ .

¿Qué coste tiene el algoritmo propuesto?. ¿Resuelve correctamente el problema MAX-SAT? Si no lo hace, ¿es un algoritmo de aproximación con tasa constante? Y, en caso de que lo sea, dad una cota a la tasa de aproximación.

**Exercici 4 (2 punts)** El problema dels estudiants i el professor mandrós. A una classe d'algorísmia, amb 100 alumnes, el professor té mandra de corregir els exàmens. Per tant, decideix aprovar o suspendre a tots per la via ràpida. A una sala, col·loca en fila 100 capsos i dintre de cada capsa el nom d'un alumne. Els alumnes poden etiquetar com vulguin les capsos i col·locar-les en el ordre que vulguin (sense manipular o mirar els continguts). Un cop han finalitzat, surten de la sala, i el professor els fa entrar, un a un a la sala, cadascun pot mirar un màxim de 50 capsos (sense remoure els continguts de cada capsa) si troba el seu nom a dintre d'una d'aquestes capsos, surt i entra el següent estudiant. Si tots els 100 estudiants troben els seus noms, tots els estudiants tenen un 10 de nota final. Si un d'ells, no troba el seu nom, tots tenen un 0 de nota. Quina estratègia hauran de dissenyar els estudiants per que la probabilitat que tots els estudiants treguin un 10 sigui  $\geq 1/3$ ? (L'estratègia totalment aleatòria té una probabilitat d'èxit de  $\frac{1}{2^{100}}$ .)

**Exercici 5 (2 punts)** El problema *degree-constrained minimum spanning tree (d-MST)* tiene la siguiente definición. Dado un grafo completo y no dirigido  $G = (V, E)$ , en el que cada arista  $e \in E$  tiene asociado un coste  $w_e \geq 0$ . Un *árbol de expansión*  $T = (V, E_T \subseteq E)$  en  $G$  es un subgrafo de  $G$  que contiene todos los nodos de  $G$  y no contiene ningún ciclo. El *grado*  $d_v^T$  de un nodo  $v$  con respecto a un árbol  $T$  se define como el número de las aristas de  $T$  incidentes en  $v$ . El problema  $d$ -MST consiste en obtener un árbol de expansión  $T^*$ , de manera que todos los nodos tienen un grado con respecto a  $T^*$  más pequeño o igual que  $d$  (es decir,  $d_v^{T^*} \leq d, \forall v \in V$  en  $G$ ) y de manera que sobre  $T^*$  se minimice la función

$$f(T^*) := \sum_{e \in E_{T^*}} w_e.$$

Observad que  $d$ ,  $2 \leq d \leq |V| - 1$  es un parámetro que forma parte de la definición del problema, no de la entrada.

(1) (1 punto) Proporcionad un algoritmo voraz para el problema  $d$ -MST dando el pseudocódigo del algoritmo. (Pista: uno se puede inspirar en algoritmos voraces para el problema *minimum spanning tree*)

(2) (1 punto) Definid un vecindario para el problema  $d$ -MST. Explicad la generación de todos los vecinos (factibles) de una solución  $T$  mediante un algoritmo en pseudocódigo.

**Exercici 6 (1 punt)** Cuáles son las componentes algorítmicas básicas de la búsqueda local iterada (en inglés, *iterated local search*)? Explica cada componente brevemente (como máximo 2 frases por cada componente), y proporciona una descripción de la metaheurística en pseudo-código.

**Exercici 7 (0.5 punts)** Explicad brevemente las ventajas y desventajas de las metaheurísticas en comparación con métodos exactos.