Algorismia **QP 2010-2011**

Algorismes d'aproximació **31-03-2011**

Para los siguientes enunciados diseñad un algoritmo que sea correcto (proporcione una solucion con la calidad requerida) y eficiente. Además de una descripción a alto nivel del algoritmo proporcionad: Los argumentos que garantizan la corrección del algoritmo propuesto y el coste asintótico en caso peor del algoritmo (en función del tamaño de la entrada).

1 Algorismes d'aproximació

1. Considereu l'algorisme següent:

   funció vorаç-grau-máxim(G : graf)
   $U := \varnothing; V := \mathsf{V}(G); E := \mathsf{A}(G);$
   mentre $V \neq \varnothing$ **fer**
   seleccionar un vèrtex v de grau máxim al graf (V, E);
   $U := U \cup \{u\};$
   $V := V - \{u\} - \{x \mid (x, u) \in E\};$
   $E := E \cap (V \times V)$
   fi mentre;
   retorna U
   fi funció.

   Demostreu que no és una aproximació de ratio constant per al problema del Conjunt independent màxim.

2. Considereu l'algorisme següent:

   funció voraç-arestes(G : graf)
   $U := \varnothing; E := \mathsf{A}(G);$
   mentre $E \neq \varnothing$ **fer**
   seleccionar una aresta qualsevol $e = (u, v) \in E$;
   $U := U \cup \{u, v\};$
   $E := E - \{e' \in E \mid e'$ incident amb $e\}$
   fi mentre;
   retorna U
   fi funció.

   Demostreu que és una 2-aproximació per al problema del Recobriment de vèrtexs mínim.

3. Consider the Bin Packing problem, and the following algorithms (we use the same notation as for the Next Fit algorithm):

   First Fit Place the new item in the first bin in which it fits.

   Best Fit Place the new item in the bin in which it fits such that it leaves the less possible empty space in the bin.

   Show that both algorithms are a 2-approximation for Bin Packing.

4. Considereu l'algorisme següent:

```
funció voraç-grau-mínim(G : graf)
    U := ∅; V := V(G); E := A(G);
    mentre V ≠ ∅ fer
        seleccionar un vèrtex v de grau mínim al graf (V, E);
        U := U ∪ {u};
        E := E − {(x, u) | x ∈ V};
        Remove from V all isolated vertices
    fi mentre;
    retorna U
fi funció.
```

Demostreu que no és una aproximació de ratio constant per al problema del Recobriment de vèrtex mínim.

5. Considera el siguiente algoritmo, con entrada una fórmula booleana en CNF
   (a) Sea c_0 el número de de clausulas que se satisfacen cuando a todas las variables se les asigna el valor 0.
   (b) Sea c_1 el número de de clausulas que se satisfacen cuando a todas las variables se les asigna el valor 1.
   (c) devolver el máximo de c_0 y c_1.

   Demuestra que es una 2-aproximación para el problema MAXSAT.

6. Consideramos el siguiente escenario: tenemos un conjunto de n ciudades con distancias entre ellas. Queremos seleccionar un subconjunto C de k ciudades en las que queremos ubicar un centro comercial. Asumiendo que las personas que viven en una ciudad compraran en el centro comercial más próximo se quiere buscar una ubicación C de manera que todas las ciudades tengan un centro comercial a distancia menor que r en la que intentamos minimizar r sin perder cobertura. Para ello diremos que C es un r-recubrimiento si todas las ciudades están a distancia como mucho r de una ciudad en C. Sea $r(C)$ el mínimo r para el que C es un r-cover. Nuestro objetivo es encontrar C con k vértices para el que $r(c)$ es mínima.
   (a) Demuestra que si $k \geqslant n$, la solución formada por todas las ciudades es óptima.
       A partir de ahora asumiremos que $k \leqslant n$.
   (b) Diseña un algoritmo que dado C calcule $r(C)$. Analiza su coste.
   (c) El problema es NP-dificil?
   (d) Considera el siguiente algoritmo:

   ```
   Seleccionar cualquier ciudad s y define s = S
   mentre |C| ≠ k fer
       seleccionar una ciudad s ∈ S que minimiza la distancia de s a C;
       S := S ∪ {s};
   fi mentre;
   retorna C
   ```

   Demuestra que es un algoritmo de aproximación con tasa 2.