Inteligencia Artificial
Razonamiento probabilístico

Primavera 2008

profesor: Luigi Ceccaroni

Inferencia probabilística

Las leyes de la probabilidad permiten establecer diferentes métodos de inferencia

- **Marginalización:** Probabilidad de una proposición atómica con independencia de los valores del resto de proposiciones

$$P(Y) = \sum_{z} P(Y, z)$$

- **Probabilidades condicionadas:** Probabilidad de una proposición dados unos valores para algunas proposiciones e independiente del resto de proposiciones (a partir de la regla del producto)

$$P(X|e) = \alpha \sum_{y} P(X, e, y)$$

El valor α es un factor de normalización que corresponde a factores comunes que hacen que las probabilidades sumen 1

Inferencia probabilística: ejemplo

Consideremos un problema en el que intervengan las proposiciones $Fumador = \{fumador, \neg fumador\}$, $Sexo = \{varon, mujer\}$, $Enfisema = \{enfisema, \neg enfisema\}$

	enfisema		*¬enfisema*	
	varon	*mujer*	*varon*	*mujer*
fumador	0.2	0.1	0.05	0.05
¬fumador	0.02	0.02	0.23	0.33

Inferencia probabilística: ejemplo

$$
\begin{aligned}
P(enfisema \wedge varon) &= 0{,}2 + 0{,}02 \\
P(fumador \vee mujer) &= 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}33 \\
P(Fumador|enfisema) &= \langle P(fumador, enfisema, varon) \\
&\quad + P(fumador, enfisema, mujer), \\
&\quad P(\neg fumador, enfisema, varon) \\
&\quad + P(\neg fumador, enfisema, mujer)\rangle \\
&= \alpha\langle 0{,}3, 0{,}04\rangle \\
&= \langle 0{,}88, 0{,}12\rangle
\end{aligned}
$$

La regla de Bayes

- Hemos enunciado la regla del producto como:

$$P(X, Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X)$$

- Esto nos lleva a lo que denominaremos la **regla de Bayes**

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

- Esta regla y la propiedad de independencia serán el fundamento del razonamiento probabilístico y nos permitirá relacionar las probabilidades de unas evidencias con otras

La regla de Bayes + independencia

- Suponiendo que podemos estimar exhaustivamente todas las probabilidades que involucran la variable Y podemos reescribir la formula de Bayes como:

$$P(Y|X) = \alpha P(X|Y)P(Y)$$

- Suponiendo independencia condicional entre dos variables podremos escribir:

$$P(X, Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z)$$

- De manera que:

$$P(Z|X, Y) = \alpha P(X|Z)P(Y|Z)P(Z)$$

Redes Bayesianas

- A simple, graphical notation for conditional independence assertions and hence for compact specification of full joint distributions.

- Syntax:
  - a set of nodes, one per variable
  - a directed, acyclic graph (links ≈ "directly influences")
  - a conditional distribution for each node given its parents:

$$\mathbf{P}\,(X_i \mid \text{Parents}\,(X_i))$$

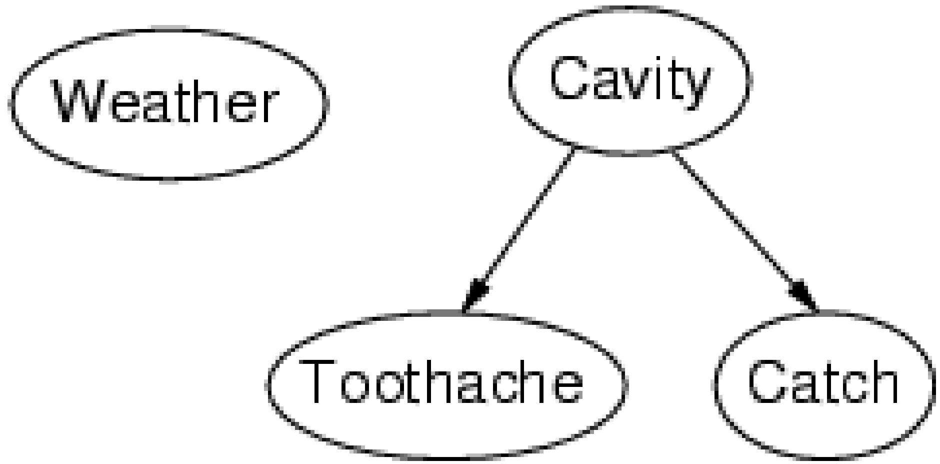
- In the simplest case, conditional distribution represented as conditional probability tables (CPTs) giving the distribution over X_i for each combination of parent values.

Redes Bayesianas

- Si determinamos la independencia entre variables podemos simplificar el cálculo de la combinación de sus probabilidades y su representación
- Las **redes bayesianas** permiten la representación de las relaciones de independencia entre variable aleatorias
- Una red bayesiana es un **grafo dirigido acíclico** que tiene información probabilística en sus nodos indicando cual es la influencia de sus padres en el grafo sobre el nodo $(P(X_i|padres(X_i)))$
- El significado intuitivo de un enlace entre dos nodos X e Y es que la variable X tiene influencia sobre Y
- El conjunto de probabilidades representadas en la red describe la distribución de probabilidad conjunta de todas las variables

Ejemplo

- Topology of network encodes conditional independence assertions:



- *Weather* is independent of the other variables.
- *Toothache* and *Catch* are conditionally independent given *Cavity.*

Tamaño reducido

- A CPT for Boolean X_i with k Boolean parents has 2^k rows for the combinations of parent values.

- Each row requires one number p for X_i = *true* (the number for X_i = *false* is just $1-p$).

- If each of the n variables has no more than k parents, the complete network requires $O(n \cdot 2^k)$ numbers.

- I.e., grows linearly with n, vs. $O(2^n)$ for the full joint distribution.

Semántica

The full joint distribution is defined as the product of the local conditional distributions:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \pi_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$$

e.g.,

P(d ∧ A=equilibrada ∧ P=alta ∧ ¬f ∧ ¬i)

= P(d) P(A=balanced) P(P=alta|d, A=equilibrada) P(¬f) P(¬i|P=alta, ¬f)

Construcción de redes Bayesianas

- 1. Choose an ordering of variables $X_1, \dots, X_n$
- 2. For $i = 1$ to n
  - add X_i to the network
  - select parents from $X_1, \dots, X_{i-1}$ such that

$$\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \dots X_{i-1})$$

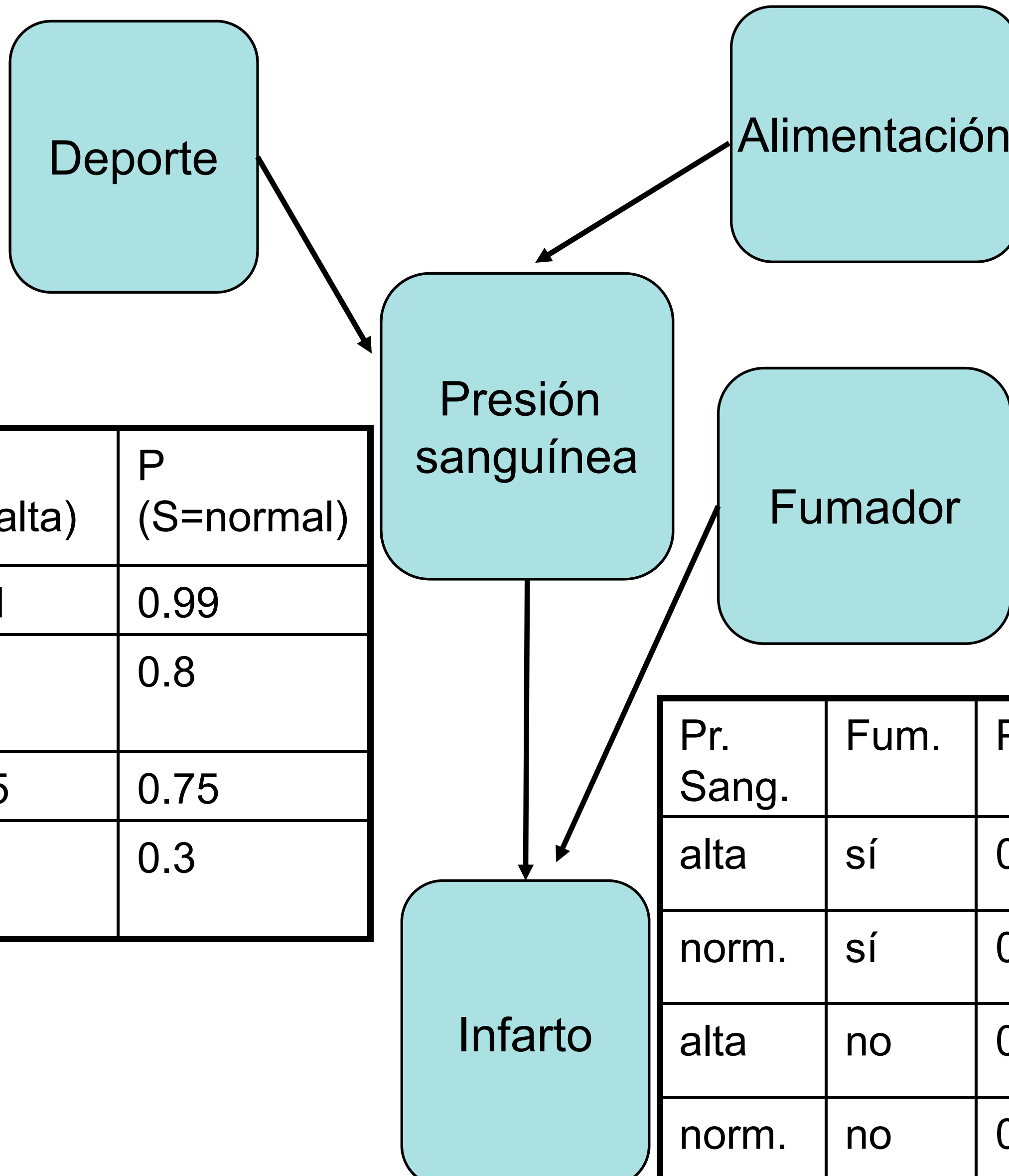
This choice of parents guarantees:

$$\mathbf{P}(X_1, \dots, X_n) = \pi_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}) \text{ (chain rule)}$$

$$= \pi_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) \text{ (by construction)}$$

Ejemplo

Deporte	P(D)
sí	0.1
no	0.9



Alimentación	P(A)
equilibrada	0.4
no equilibrada	0.6

Fumador	P(F)
sí	0.4
no	0.6

Alim.	Deporte	P (S=alta)	P (S=normal)
eq.	sí	0.01	0.99
no eq.	sí	0.2	0.8
eq.	no	0.25	0.75
no eq.	no	0.7	0.3

Pr. Sang.	Fum.	P(I=sí)	P(I=no)
alta	sí	0.8	0.2
norm.	sí	0.6	0.4
alta	no	0.7	0.3
norm.	no	0.3	0.7

Redes Bayesianas - Distribución conjunta - ejemplo

$$
\begin{aligned}
&P(Infarto = si \wedge Presion = alta \wedge Fumador = si\\
&\wedge Deporte = si \wedge Alimentacion = equil)\\
&=\\
&P(Infarto = si | Presion = alta, Fumador = si)\\
&P(Presion = alta | Deporte = si, Alimentacion = equil)\\
&P(Fumador = si) P(Deporte = si) P(Alimentacion = equil)\\
&= 0{,}8 \times 0{,}01 \times 0{,}4 \times 0{,}1 \times 0{,}4\\
&= 0{,}000128
\end{aligned}
$$

Coste de representación

- Como comentamos, el coste de representar la distribución de probabilidad conjunta de n variables binarias es $O(2^n)$
- La representación de redes bayesianas nos permite una representación mas compacta gracias a la factorización de la distribución conjunta
- Suponiendo que cada nodo de la red tenga como máximo k padres ($k \ll n$), un nodo necesitará 2^k para representar la influencia de sus padres, por lo tanto el espacio necesario será $O(n2^k)$.
- Por ejemplo, con 10 variables y suponiendo 3 padres como máximo tenemos 80 frente a 1024, con 100 variables y suponiendo 5 padres tenemos 3200 frente a aproximadamente 10^{30}

Inferencia Exacta

- **Inferencia por enumeración**: Cualquier probabilidad condicionada se puede calcular como la suma de todos los posibles casos a partir de la distribución de probabilidad conjunta.

$$P(X|\mathbf{e}) = \alpha P(X, \mathbf{e}) = \alpha \sum_{y} P(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$$

- La red bayesiana nos permite factorizar la distribución de probabilidad conjunta y obtener una expresión mas fácil de evaluar
- Usando la red bayesiana ejemplo podemos calcular la probabilidad de ser fumador si se ha tenido un infarto y no se hace deporte

$$P(Fumador|Infarto = si, Deporte = no)$$

Inferencia Exacta: Ejemplo

La distribución de probabilidad conjunta de la red sería:

$$P(D, A, S, F, I) = P(I|S, F)P(F)P(S|D, A)P(D)P(A)$$

Debemos calcular $P(F|I = si, D = no)$, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
&P(F|I = s, D = n) = \alpha P(F, I = s, D = n)\\
&= \alpha \sum_{A\in\{e,\neg e\}} \sum_{S\in\{a,n\}} P(D = n, A, S, F, I = s)\\
&= \alpha P(D = n)P(F) \sum_{A\in\{e,\neg e\}} P(A) \sum_{S\in\{a,n\}} P(S|D = n, A)P(I = s|S, F)
\end{aligned}$$

Inferencia Exacta: Ejemplo

Si enumeramos todas las posibilidades y las sumamos de acuerdo con la distribución de probabilidad conjunta tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&P(Fumador|Infarto = si, Deporte = no)\\
&= \alpha\langle 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}4 \cdot (0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0,6) + 0{,}6 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6))\\
&\qquad 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4 \cdot (0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0,75 \cdot 0{,}3) + 0{,}6 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3))\rangle\\
&= \alpha\langle 0{,}253, 0, 274\rangle\\
&= \langle 0, 48, 0{,}52\rangle
\end{aligned}
$$

Algoritmo de eliminación de variables

- El **algoritmo de eliminación de variables** intenta evitar la repetición de cálculos que realiza la inferencia por enumeración
- El algoritmo utiliza técnicas de programación dinámica de manera que se guardan cálculos intermedios para cada variable para reutilizarlos (*factores*)
- ~~El cálculo de la probabilidad de la pregunta se realiza evaluando la expresión de la distribución de probabilidad conjunta de izquierda a derecha~~
- Los *factores* correspondientes a cada variable se van acumulando según se necesita
- La ventaja de este algoritmo es que las variables no relevantes desaparecen al ser factores constantes

Algoritmo de eliminación de variables

funcion ELIMINACION-Q(X,**e**,*rb*) **retorna** distribucion sobre X
  factores=[]; *vars*=REVERSE(VARS(*rb*))
  para cada *var* **en** *vars* **hacer**
    factores=concatena(factores,CALCULA-FACTOR(*var*,**e**))
    si *var* es variable oculta **entonces**
      factores=PRODUCTO-Y-SUMA(*var*,*factores*)
  retorna NORMALIZA(PRODUCTO(*factores*))

- CALCULA-FACTOR genera el factor correspondiente a la variable en la función de la distribución de probabilidad conjunta
- PRODUCTO-Y-SUMA multiplica los factores y suma respecto a la variable oculta
- PRODUCTO multiplica un conjunto de factores

Algoritmo de eliminación de variables - Factores

- Un factor corresponde a la probabilidad de un conjunto de variables dadas las variables ocultas
- Se representa por una tabla que para cada combinación de variables ocultas da la probabilidad de las variables del factor

$$f_X(Y,Z) = \begin{array}{cc|c} Y & Z & \\ \hline C & C & 0.2 \\ C & F & 0.4 \\ F & C & 0.8 \\ F & F & 0.6 \end{array}$$

- Los factores tienen dos operaciones: suma y producto

Suma de Factores

- La suma se aplica a un factor y sobre una variable oculta del factor. Como restado obtenemos una matriz reducida en la que las filas del mismo valor se han acumulado

$$f_{X\overline{Z}}(Y) = \sum_Z f_X(Y,Z) = \begin{array}{c|c} \mathrm{Y} & \\ \hline \mathrm{C} & 0.6 \\ \mathrm{F} & 1.4 \end{array}$$

- Es igual que una operación de agregación sobre una columna en bases de datos

Producto de Factores

- El producto de factores permite juntar varios factores entre ellos utilizando las variables ocultas comunes

$$f_{X_1X_2}(Y,W,Z) = f_{X_1}(Y,Z) \times f_{X_2}(Z,W) =$$

Y	Z		Z	W		Y	Z	W	
C	C	0.2	C	C	0.3	C	C	C	$0{,}2 \times 0{,}3$
C	F	0.8	C	F	0.7	C	C	F	$0{,}2 \times 0{,}7$
F	C	0.4	F	C	0.1	C	F	C	$0{,}8 \times 0{,}1$
F	F	0.6	F	F	0.9	C	F	F	$0{,}8 \times 0{,}9$
						F	C	C	$0{,}4 \times 0{,}3$
						F	C	F	$0{,}4 \times 0{,}7$
						F	F	C	$0{,}6 \times 0{,}9$
						F	F	F	$0{,}6 \times 0{,}3$

- Es igual que una operación de join en una base de datos multiplicando los valores de las columnas de datos

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

Volveremos a calcular $P(Fumador|Infarto = si, Deporte = no)$ a partir de la distribución de probabilidad conjunta:

$$P(D, A, S, F, I) = P(I|S, F)P(F)P(S|D, A)P(D)P(A)$$

Debemos calcular $P(F|I = si, D = no)$, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} P(F|I = s, D = n) &= \alpha P(I = s, F, D = n) \\ &= \alpha \sum_{A\in\{e,\neg e\}} \sum_{S\in\{a,n\}} P(D = n, A, S, F, I = s) \end{aligned}$$

En esta ocasión no sacamos factores comunes para seguir el algoritmo

$$\alpha P(D = n) \sum_{A\in\{e,\neg e\}} P(A) \sum_{S\in\{a,n\}} P(S|D = n, A)P(F)P(I = s|S, F)$$

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

El algoritmo empieza calculando el factor para la variable *Infarto* ($P(I = s|S, F)$), esta tiene fijo su valor a `si`, depende de las variables *Presión Sanguinea* y *Fumador*

$f_I(S, F) =$

S	F	
a	s	0.8
a	n	0.7
n	s	0.6
n	n	0.3

La variable fumador ($P(F)$) no depende de ninguna otra variable, al ser la variable que preguntamos el factor incluye todos los valores

$f_F(F) =$

F	
s	0.4
n	0.6

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

La variable *Presión Sanguinea* ($P(S|D = n, A)$), depende de las variable *Deporte* que tiene fijo su valor a `no` y *Alimentación*. Esta es una variable oculta, por lo que se debe calcular para todos sus valores

$f_S(S, A)=$

S	A	
a	e	0.25
a	¬e	0.7
n	e	0.75
n	¬ e	0.3

Al ser la variable *Presión Sanguinea* una variable oculta debemos acumular todos los factores que hemos calculado

$$f_S(S, A) \times f_F(F) \times f_I(S, F)$$

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

$f_{FI}(S,F) = f_F(F) \times f_I(S,F) =$

S	F	
a	s	0.8×0.4
a	n	0.7×0.6
n	s	0.6×0.4
n	n	0.3×0.6

$f_{FIS}(S,F,A) = f_{FI}(S,F) \times f_S(S,A) =$

S	F	A	
a	s	e	0.8×0.4×0.25
a	s	¬e	0.8×0.4×0.7
a	n	e	0.7×0.6×0.25
a	n	¬e	0.7×0.6×0.7
n	s	e	0.6×0.4×0.75
n	s	¬e	0.6×0.4×0.3
n	n	e	0.3×0.6×0.75
n	n	¬e	0.3×0.6×0.3

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

Y ahora sumamos sobre todos los valores de la variable S para obtener el factor correspondiente a la variable *Presión Sanguinea*

$$f_{FI\overline{S}}(F,A) = \sum_{S\in\{a,n\}} f_{FIS}(S,F,A) =$$

F	A	
s	e	$0.8{\times}0.4{\times}0.25 + 0.6{\times}0.4{\times}0.75 = 0.26$
s	¬e	$0.8{\times}0.4{\times}0.7 + 0.6{\times}0.4{\times}0.3 = 0.296$
n	e	$0.7{\times}0.6{\times}0.25 + 0.3{\times}0.6{\times}0.75 = 0.24$
n	¬e	$0.7{\times}0.6{\times}0.7 + 0.3{\times}0.6{\times}0.3 = 0.348$

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

El factor de la variable *Alimentación* ($P(A)$) no depende de ninguna variable, al ser una variable oculta generamos todas las posibilidades

$$f_A(A) = \begin{array}{c|c} \text{F} & \\ \hline \text{e} & 0.4 \\ \neg\text{e} & 0.6 \end{array}$$

Ahora debemos acumular todos los factores calculados

$$f_{AFI\overline{S}}(A) = f_A(A) \times f_{FI\overline{S}}(F,A) = \begin{array}{cc|l} \text{F} & \text{A} & \\ \hline \text{s} & \text{e} & 0.26 \times 0.4 = 0.104 \\ \text{s} & \neg\text{e} & 0.296 \times 0.6 = 0.177 \\ \text{n} & \text{e} & 0.24 \times 0.4 = 0.096 \\ \text{n} & \neg\text{e} & 0.348 \times 0.6 = 0.208 \end{array}$$

Algoritmo de eliminación de variables - ejemplo

Y ahora sumamos sobre todos los valores de la variable A para obtener el factor correspondiente a la variable *Alimentación*

$$f_{\overline{A}FI\overline{S}}(F) = \sum_{A\in\{e,\neg e\}} f_{AFI\overline{S}}(A) =$$

F	
S	$0.104 + 0.177 = 0.281$
n	$0.096 + 0.208 = 0.304$

Y por último la variable *Deporte* ($P(D = n)$) tiene el valor fijado a *no* y dado que no depende de la variable *fumador* se puede obviar, ya que es un factor constante.

Ahora, si normalizamos a 1

$$P(F|I = s, D = n) =$$

F	
S	0.48
n	0.52

Complejidad de la inferencia exacta

- La complejidad del algoritmo de eliminación de variables depende del tamaño del mayor factor, que depende del orden en el que se evalúan las variables y la topología de la red
- El orden de evaluación que escogeremos será el topológico según el grafo
- La complejidad de la inferencia exacta es NP-hard en el caso general
- Si la red bayesiana cumple que para cada par de nodos hay un único camino no dirigido (**poliárbol**) entonces se puede calcular en tiempo lineal
- Para obtener resultados en el caso general se recurre a algoritmos aproximados basados en técnicas de muestreo

Summary

- Bayesian networks provide a natural representation for (causally induced) conditional independence.
- Topology + CPTs = compact representation of joint distribution.
- Generally easy for domain experts to construct.