COLECCIÓN DE PROBLEMAS

DE

Introducción a los Esquemas Algorítmicos

María Teresa Abad Soriano
Conrado Martínez Parra

Febrero/2002
Departamento L.S.I.-U.P.C.

SECCIONES

I. DIVIDE Y VENCERÁS
II. GRAFOS
III. VORACES
IV. VUELTA ATRÁS y RAMIFICACIÓN Y PODA
V. MISCELÁNEA

Los problemas que vienen a continuación aparecen en una sola sección, pero eso no significa que la única forma de resolverlos, ni tan siquiera la mejor, sea la que corresponde al tema en que aparecen incluidos. El propósito de su ubicación es que no sea inmediato asignar un esquema para su resolución, ¡ es necesario pensar!

I. DIVIDE Y VENCERÁS

I.1. Dissenyar un algorisme de recerca *ternaria* en un vector. La idea és la següent: partir el vector en tres parts i activar la funció recursivament sobre les parts del vector que calgui. Analitzar el cost de l'algorisme i comparar-lo amb el de recerca binària.

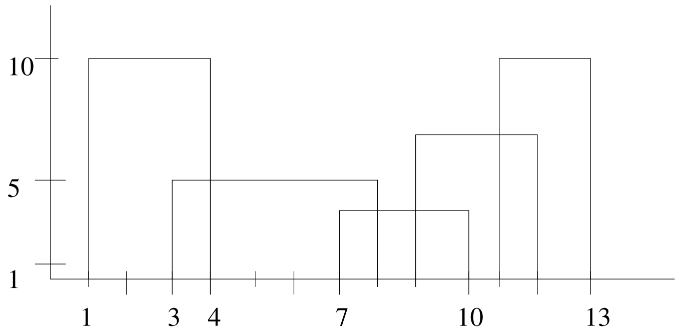
I.2. Donats n valors reals $(v_1,\ldots,v_n)$ dissenyar un algorisme que calculi quant val la diferència d entre els dos valors més propers:

$$d = \min_{1\leq i,\, j \leq n\ ,\ i \neq j} | v_i - v_j |$$

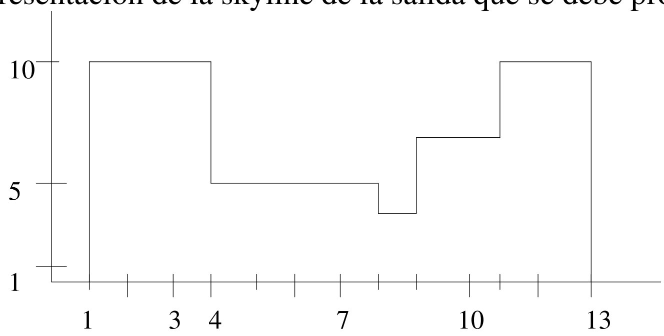
Suggeriment : Feu servir l'algorisme de partició del quicksort.

I.3. Sea a[1..n], n≥1, un vector de enteros diferentes y ordenados crecientemente, tal que algunos de los valores pueden ser negativos. Diseñar un algoritmo que devuelva un índice natural k, $1\leq k \leq n$, tal que a[k]=k, siempre que tal índice exista. El coste del algoritmo debe ser O($log\ n$) en el caso peor.
Se pide diseñar el algoritmo dando todo lujo de detalles. Justificar su corrección y el coste.
Repetir el problema pero para un vector de n enteros posiblemente repetidos y ordenado decrecientemente.

I.4. Dada la localización exacta y la altura de varios edificios rectangulares de la ciudad, obtener la *skyline*, linea de recorte contra el cielo, que producen todos los edificios eliminando las líneas ocultas. *Ejemplo* : La entrada es una secuencia de edificios y un edificio se caracteriza por una tripleta de valores (*xmin,xmax,h*).
Una posible secuencia de entrada para los edificios de la siguiente figura podría ser :
(7,10,3), (9,12,7), (1,4,10), (3,8,5) y (11,13,10).



Y ésta es la representación de la skyline de la salida que se debe producir :

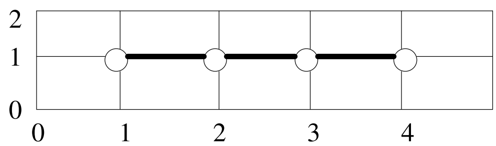


Su secuencia asociada es : (1,4,10), (4,8,5),(8,9,3), (9,11,7) y (11,13,10)

I.5. Se está jugando un torneo entre *n* jugadores. Cada jugador juega una vez contra los *n-1* jugadores restantes (es un *round-robin*). No hay empates y los resultados de los partidos se anotan en una matriz. En general no se pueden ordenar los jugadores porque falla la transitividad, es decir, *A* le gana a *B*, *B* le gana a *C* pero *C* le gana a *A*. Estamos interesados en un orden más débil que definimos de la siguiente forma : en la secuencia ordenada que se obtiene *P1,P2,..,Pn* se cumple que *P1* le ha ganado a *P2*, *P2* le ha ganado a *P3*, etc. y *Pn-1* le ha ganado a *Pn*. Diseñar un algoritmo que produzca esta secuencia ordenada con un coste de $O(n.\log n)$. La entrada del algoritmo es la matriz de resultados y el coste de acceder a una posición de la matriz es constante.

I.6. Sea *T* un árbol binario completo de altura *h* y $n=2^h-1$ vértices. Queremos encajar el árbol *T* en un plano de la siguiente manera : A cada vértice le corresponde un único punto en el plano, vértices adyacentes están conectados por lineas rectas (paralelas al eje *x* o paralelas al eje *y*) y no pueden intersectar dos líneas. El problema general es encontrar el rectángulo de área mínima que contenga el árbol. Por ejemplo : un grafo de *k* vértices (*k*=4 en la figura) que forma una secuencia :

, podría ser encajado en un rectángulo de área 2(*k*+1). Ver en la figura el encaje con *k*=4.



Encajar grafos en el plano de esta forma es un problema importante en el diseño de chips, sobre todo en VLSI. Diseñar un algoritmo que te indique como encajar el árbol *T* en el plano de modo que éste ocupe un área de orden O(*n*). No se pide el de área mínima.

I.7. Diseñar un algoritmo eficiente para el problema de la *selección múltiple* : Dados un vector A[1..*n*] de elementos, *n*>0, y un vector *j*[1..*p*] de enteros, *p*>0, donde $1 \leq j[1] < j[2] < \ldots < j[p] \leq n$, hay que hallar los elementos *j*[1]-*ésimo*, *j*[2]-*ésimo*, ..., *j*[*p*]-*ésimo* del vector A si éste estuviera ordenado. La solución propuesta debe ser más "eficiente" que la evidente de ordenar el vector A o que la de iterar un algoritmo de selección *p* veces, una vez con cada valor *j*[*i*] dado. No obstante, no se pide que se demuestre que el algoritmo propuesto es efectivamente más eficiente que las dos soluciones triviales mencionadas ni que se calcule su coste (es un problema matemáticamente complejo).

Ejemplo :

El vector A contiene los siguientes elementos A[1]=8, A[2]=14, A[3]=5, A[4]=7, A[5]=3, A[6]=1, A[7]=25 y A[8]=2.

El vector j, qué está ordenado crecientemente, contiene los índices de los elementos de A que se quieren obtener si A estuviera ordenado. Así, *j*[1]=2, *j*[2]=5 y *j*[3]=7.

El resultado nos ha de dar el valor de A que ocuparía la posición 2 si A estuviera ordenado, o sea Res[1]=2, y el valor de A que ocuparía la posición 5 si A estuviera ordenado, o sea Res[2]=7 y el valor de A que ocuparía la posición 7 si A estuviera ordenado, o sea Res[3]=14.

I.8. El algoritmo de ordenación rápida, *quicksort*, no es demasiado eficaz para ordenar cadenas, ya que la comparación entre dos cadenas es una operación costosa (proporcional a la longitud de las cadenas comparadas, en caso peor). Peor aún, los intercambios son todavía

más costosos. Por ello se pide que se desarrolle una variante de quicksort, *vqs*, que ordene eficazmente *n* cadenas.
Para empezar, el vector que reciba como entrada *vqs* no será un vector de *n* cadenas, sino un vector de *n* apuntadores al primer carácter de cada cadena. Un símbolo especial*, FDC*, marcará el fin de una cadena. Este símbolo es menor que cualquier otro carácter en el orden alfabético. La notación A[*i*][*j*] permite acceder al *j*-ésimo carácter de la cadena *i*-ésima en el caso en que la longitud de la cadena sea inferior a *j*, mientras que A[*i*][*j*]=*FDC* si *j* es la longitud de la cadena y estará indefinido en otro caso. Como pista, el procedimiento a diseñar, una vez hecha la inmersión de parámetros, tiene la siguiente especificación :

// Pre: (0≤ i, j ≤n-1) ∧ (i+1< j) ∧ todas las cadenas en A[*i..j*] tienen un prefijo común de
// longitud k
void vqs (char* A[ ], int i, int j, int k)
// Post : A[*i..j*] está ordenado crecientemente según el orden alfabético

La llamada inicial sería entonces vqs(A, 0, n-1, 0).
Es necesario que vuestro algoritmo sea muy detallado y que se diseñen todas las funciones auxiliares que se usen.

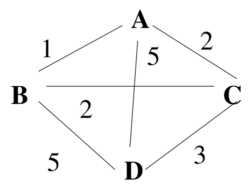
II. GRAFOS

II.1. Una empresa disposa d'un conjunt d'ordinadors distribuïts dins un àmbit geografic. Diverses parelles d'aquests ordinadors estan físicament connectats mitjançant una línea qualsevulla de comunicació (bi-direccional). Cada connexió té un cost associat, en funció d'alguns paràmetres (longitud de la línea, qualitat del senyal, …). Dos ordinadors estan comunicats si existeix una seqüència de línies de comunicació que uneix ambdós ordinadors. L'empresa vol calcular quines línies de comunicació ha d'usar per que es compleixi que :
(a) dos ordinadors distingits estiguin comunicats entre sí amb el mínim cost possible.
(b) tots els ordinadors estiguin comunicats, de manera que el cost total de la xarxa sigui mínim.

II.2. Sigui el graf no dirigit i etiquetat $G=(V,E)$ amb $|V|=n$ i $|E|=e$. Quin algorisme aplicaries per trobar un arbre mínim d'expansió en el tres casos següents i per què:
a/ $e<n-1$
b/ $2n > e > n-1$
c/ hi ha una aresta entre tot parell de nodes.
Si en algun apartat G ha de complir alguna condició addicional, esmenta-la.

II.3. Un *orden topológico inverso* de un grafo dirigido acíclico es una secuencia formada por todos los vértices del grafo de manera que si (v,w) es una arista entonces w aparece antes que v en la secuencia.
A partir del algoritmo de recorrido en profundidad, escribir un algoritmo que construya un orden topológico inverso de un grafo dirigido acíclico dado, y argumentar cuidadosamente su corrección. (Es obligatorio diseñar el algoritmo partiendo del recorrido en profundidad. No basarse en otro algoritmo ni diseñar uno nuevo).

II.4. Donat el graf de la figura, aplica-li els algoritmes de Prim i Kruskal. Ves mostrant como creix l'arbre d'expansió pas a pas. En l'algoritme de Prim, comença pel node A.



II.5. Se dice que un vértice de un grafo conexo es un *punto de articulación* del mismo si al suprimir ese vértice y todas las aristas que inciden en él, el grafo resultante deja de ser conexo. Por ejemplo, un grafo en forma de anillo NO TIENE puntos de articulación mientras que todo nodo que no se hoja de un árbol es punto de articulación.
Dado un grafo conexo no dirigido, $G=(V,E)$ diseñar un algoritmo que indique qué vértices del grafo son puntos de articulación. Indicar qué implementación del grafo es la que proporciona un algoritmo más eficiente.

II.6. Dado un grafo DIRIGIDO diseñar un algoritmo que indique si el grafo es un árbol o no lo es. Decidir la implementación más adecuada para el grafo. Explicar las decisiones tomadas.

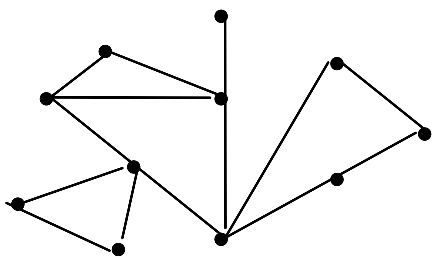
II.7. Dissenyeu una variant de l'algorisme de recorregut en profunditat que proporcioni els components connexes d'un graf dirigit acíclic, modificant si cal la signatura i/o implementació clàssica de TAD graf. Un component connex d'un graf dirigit *G* és un conjunt *C* maximal de vèrtexs tal que tot parell de vèrtexs de *C* està unit per algun camí que passa íntegrament per vèrtexs de *C*. Modifiqueu la solució pel cas que el graf pugui presentar algun cicle.

II.8. La región de Aicenev, al sur del Balquistán, es famosa en el mundo entero por su sistema de comunicaciones basado en canales (grandes y pequeños) que se ramifican. Todos los canales son navegables y todas las localidades de la región están situadas junto a algún canal.
Una vez al año los alcaldes de la región se reunen en la localidad de San Marcos y cada uno de ellos se desplaza en su *vaporetto* oficial. Proponed a los alcaldes un algoritmo que les permita encontrar la manera de llegar a San Marcos de manera que entre todos hayan recorrido el mínimo de distancia.
A consecuencia de la crisis energética, los alcaldes han decidido compartir los *vaporettos* . Cada uno va en el suyo hasta alguna otra ciudad, allí se une a otro u otros, van juntos hasta algún otro sitio, formando así grupos que se dirigen a San Marcos. Discutid la validez de la solución anterior. Proponed otra, si es necesario, para minimizar la distancia recorrida por los *vaporettos* (no necesariamente por los alcaldes).

II.9. En un ordinador han d´executar-se unes tasques $T_1,\ldots,T_k$, cadascuna de les quals requereix un temps t_i. A més, es tenen unes restriccions totes del tipus: la tasca T_i ha d´executar-se després de la tasca T_j. Doneu un model conegut que descrigui aquesta situació, i digueu quin algorisme conegut ha d´aplicar-se per trobar el mínim temps necessari per executar les *k* tasques respectant les restriccions.

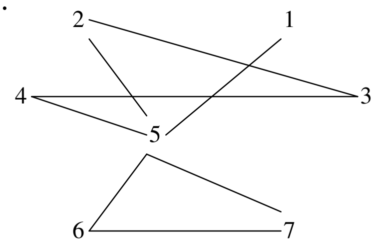
II.10. Una expressió aritmètica pot representar-se com un graf dirigit acíclic. Digueu de quina manera, i quin algorisme pot aplicar-s´hi per avaluar-la.

II.11. Dado un grafo $G=(V,E)$ conexo y no dirigido, diseñar un algoritmo que encuentre un vértice tal que al ser eliminado de *G* junto con todas sus aristas incidentes, el grafo continúe siendo conexo. Probar que en todo grafo conexo existe ese vértice. Analizar el coste de la solución obtenida.
¿ Qué vértices se podrían eliminar en el grafo que viene a continuación ?

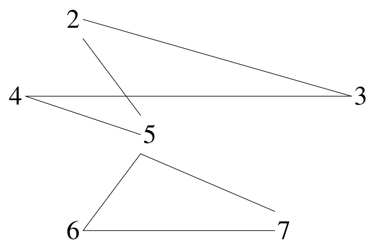


II.12. Dado un grafo $G=(V,E)$ no dirigido con $n=|V|$, diseñar un algoritmo que dada una constante natural $k\geq 0$ calcule el subgrafo inducido máximo $H=(U,F)$, si es que existe. El subgrafo inducido máximo *H* ha de cumplir que todos sus vértices tengan un grado mayor o igual que *k*. Realizar un análisis de la eficiencia.
Pista: Comenzar el análisis resolviendo estos 3 casos $n \leq k$, $n = k+1$ y $n > k+1$.

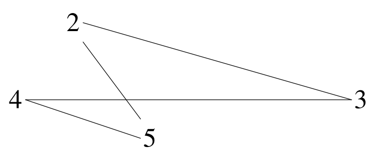
Por ejemplo, dado el grafo siguiente :



Para k=2, el subgrafo inducido máximo es :



Este también es un subgrafo inducido de grado 2 pero NO ES MAXIMO

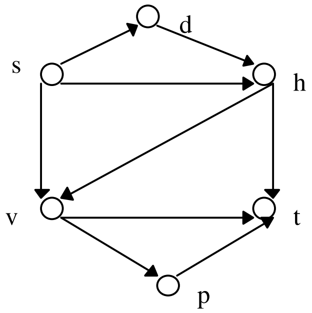


II.13. Renfe ha decidido modificar su red de ferrocarril y ha diseñado un plan que consta de 2 etapas.
Primera etapa Estudio de la red actual y determinación de las zonas aisladas : Se sabe que no existe camino entre todo par de estaciones de las *N* que componen la red. Hay que clasificar las estaciones aplicando el siguiente criterio : dos de ellas están en la misma zona si existe camino entre las mismas.
Segunda etapa Mejora de la red: Como resultado de la etapa anterior obtendremos un conjunto de zonas (identificadas por un natural entre 1 y *k*, donde *k* también se habrá obtenido en la etapa anterior) aisladas entre sí. Supongamos que conocemos el coste de enlazar cualquier par de zonas (el coste de enlazar *i* con *j* es igual al de enlazar *j* con *i*). Hay que aconsejar a Renfe qué zonas hay que conectar de modo que exista camino entre todas las zonas y con un coste total mínimo.
Nota : Todas las conexiones entre estaciones son bidireccionales.

Se pide :
(a) Diseñar un algoritmo eficiente para la primera etapa que nos diga a qué zona pertenece cada una de las *N* estaciones. Decidir la implementación más adecuada para el grafo.Justificar todas las decisiones.
(b) Diseñar un algoritmo eficiente para la segunda etapa que nos diga qué zonas hay que enlazar para que exista camino entre todas ellas y éste sea de coste total mínimo. Razonar la respuesta.

II.14. Sea $G=(V,E)$, $e=|E|$, $n=|V|$ y $e>n$, un grafo dirigido y acíclico. Fijados dos vértices del grafo, por ejemplo s y t, hay que construir un conjunto de caminos *disjuntos* de s a t , disjuntos salvo en los extremos, tal que el conjunto sea *maximal* (aquí maximal quiere decir que si se intenta incluir cualquier otro camino en el conjunto entonces los caminos dejan de ser disjuntos).

Se pide diseñar, dando todo lujo de detalles, un algoritmo de coste $O(e)$ que resuelva el problema. Justificar el esquema elegido así como la corrección de la solución propuesta.
Ejemplo. Dado el grafo de la siguiente figura



Estas son algunas de las posibles soluciones : {<s,d,h,t>, <s,v,p,t>} ó {<s,h,v,t >} ó {<s,h,v,p,t>} ó {<s,h,t>, <s,v,t>}

II.15. Dado un grafo $G=(V,E)$ no dirigido, proponer un algoritmo que indique si el grafo contiene ciclos o no en tiempo $O(n)$, $n=|V|$, independientemente de $|E|$.

II.16. Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido y acíclico y sea k la longitud del camino más largo que tiene G (longitud de un camino = número de aristas que lo componen). Diseñar un algoritmo que divida el conjunto de vértices en, como máximo, $k+1$ grupos de modo que para todo par de vértices u,w con $u\neq w$ pertenecientes al mismo grupo no exista camino entre u y w y tampoco_exista camino entre w y u**.** Un grupo ha de contener uno ó más vértices y todo vértice pertenece a uno, y sólo a uno, de los grupos. Una buena versión del algoritmo tiene coste $O(|V|+|E|)$.
Razonar el funcionamiento y la corrección de la solución; calcular el coste de la misma.

II.17. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Se dice que G es *bipartido* si V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos $C1$ y $C2$ tal que para toda arista (v,w) de G sucede que v pertenece a $C1$ y w pertenece a $C2$. Proponer un algoritmo eficiente que determine si un grafo dado es bipartido. Indicar su coste.

II.18. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido y etiquetado. Sea T un árbol de expansión mínimo del grafo G.
(a) ¿cuánto cuesta modificar T si se le añade a G una nueva arista?.
(b) ¿cuánto cuesta modificar T si se le añade a G un nuevo vértice con dos aristas incidentes en él?. Razonar la respuesta.

II.19. El algoritmo de Dijkstra calcula la longitud del camino mínimo desde un vértice dado, v, a todos los otros vértices del grafo. Explicar cómo hay que modificarlo para que, además, cuente el número de diferentes caminos mínimos de v a w, para todo $w\neq v$.

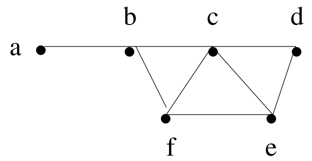
II.20. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido y conexo. Diseñar e implementar un algoritmo eficiente que determine un conjunto base de los ciclos simples del grafo. Hay que proporcionar las aristas que forman cada uno de los ciclos simples.

Notad que una arista puede pertenecer a más de un ciclo simple. Para facilitar la escritura del algoritmo la solución se devolverá en una lista cuyos elementos serán los ciclos simples encontrados. A su vez, cada ciclo será la lista de aristas que lo componen.

Definiciones necesarias :
ciclo simple : Es una secuencia S de vértices, todos ellos distintos excepto los extremos que son iguales, tal que $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_i,\ldots,v_r\}$ y $|S|\geq 4$, cumple que :

$(\forall i : 1\leq i\leq r: v_i\in V)$ y $(\forall i : 1\leq i\leq r\text{-}1: (v_i,v_{i+1})\in E)$.

conjunto base : para que un conjunto de ciclos simples sea *base* basta con que la unión de las aristas que contiene coincida exactamente con el conjunto de todas las aristas de G que forman parte de algún ciclo.
Ejemplo : Dado el grafo de la siguiente figura



un posible conjunto base de este grafo sería : S={ <(b,c),(c,d),(d,e),(e,f),(f,b)>, <(c,d),(d,e),(e,f),(f,c)>, <(c,d),(d,e),(e,c)> }

II.21. Dado un grafo dirigido, $G=(V,E)$, y dos de sus vértices, p y q, diseñar un algoritmo que devuelva una lista que contenga TODOS los caminos elementales que van de p a q en G. Una buena versión recorre cada arista una sola vez. Razonar su corrección y analizar el coste. Se recuerda que un camino elemental es aquel en que no se repiten vértices.

II.22. Sea $T=(V,E)$ un árbol no dirigido y etiquetado con etiquetas pertenecientes a los naturales. Se define $\max[u,v]$, con $u,v \in V$, como la etiqueta de la arista de peso máximo en el único camino que existe entre u y v en T.

(a) Para un T dado y para un vértice inicial dado, $v\_ini \in V$, diseñar un algoritmo que calcule $\forall u \in V \max[v\_ini,u]$ en tiempo $O(n^2)$. Argumentar cuidadosamente su corrección y coste.
(b) Modificar el algoritmo propuesto en (a) para que calcule $\forall u,v \in V \max[u,v]$. Calcular el coste y argumentar la corrección.

II.23. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido y completo. Sea $G'=(V,E')$ un grafo dirigido en el que E' contiene las mismas aristas que E pero asignando una orientación arbitraria a cada una de ellas. Demostrar que G' contiene como mínimo un camino dirigido que incluye todos los vértices exactamente una vez. Diseñar un algoritmo que construya ese camino. Argumentar su corrección y calcular su coste.

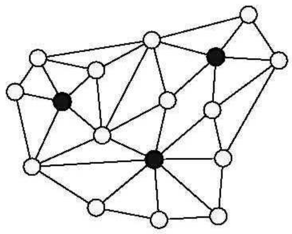
II.24. Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. Diseñar un algoritmo que :
- construya el bosque asociado al recorrido en profundidad de G y
- de acuerdo con el bosque obtenido, para cada arista de G indique a qué clase pertenece : *back, cross , forward* o *tree*.

Suponiendo el grafo implementado en listas de adyacencia el coste del algoritmo no ha de ser superior a $O(n+e)$. Importante : Argumentar la corrección del algoritmo obtenido.

II.25. Nos piden que diseñemos un algoritmo eficiente para encontrar lo que se denomina *enlaces críticos* en una red de computadores, es decir, aquellas conexiones entre nodos que en caso de averiarse dejarían partes de la red desconectadas del resto. No hay más de un enlace entre dos nodos cualesquiera de la red, pero si ningún enlace falla, la red es conexa. Calcular la eficiencia del algoritmo en términos del número de nodos n y el número de enlances m entre nodos. No se considerará válida una solución consistente en retirar una arista, comprobar si el grafo continúa siendo conexo o no, repetir lo mismo con otra arista, y con otra, y con otra ...

II.26. Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido y sea $T=(V,H)$ el árbol (o bosque) asociado al recorrido en profundidad de G. Explicar en qué circunstancias un vértice $u \in V$ puede aparecer en T completamente aislado aunque en G existan aristas que inciden y salen de él.

II.27. Dado un grafo no dirigido $G=(V,E)$, un conjunto de k vértices U se dice *dominante* si para todo vértice v del grafo, o bien $v \in U$ o bien existe una arista (u,v) tal que $u \in U$. Escribid el pseudocódigo de un algoritmo que dado el grafo G y un valor k determine si existe o no un conjunto dominante de cardinalidad k. La figura siguiente muestra un grafo y un conjunto dominante de k=3 vértices.



II.28. Supongamos que ejecutamos un recorrido en profundidad en un grafo dirigido G obteniendo la numeración DFS de cada vértice de G (denotada num_dfs[v]). Demuestra o refuta las siguientes proposiciones :

(a) Si num_dfs[u] < num_dfs[v] y existe un camino dirigido desde u a v, entonces v es descendiente de u en T_{DFS}.

(b) Si v es un vértice cuyos grados de salida y entrada son no nulos, entonces el bosque T_{DFS} no puede contener un árbol consistente en el vértice v exclusivamente.

II.29. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido conexo con pesos reales positivos en sus aristas ($\omega(e)$ denota el peso de la arista e). Diseñad un algoritmo eficiente que determine si una arista $e \in E$ dada aparece necesariamente en todo árbol de expansión mínimo de G.

II.30. Dado el bosque de expansión T_{BFS} asociado al recorrido en anchura de un grafo no dirigido G, demostrad que toda arista del grafo o bien es una arista del algún árbol en T_{BFS} o bien une dos vértices u y v que pertenecen a un mismo árbol pero ni u es antecesor de v ni v lo es de u.

II.31. Considera el siguiente algoritmo para el cálculo del árbol de expansión mínimo (MST) : se numeran los vértices de 1 a n y se forma un bosque consistente en n árboles, cada uno conteniendo un vértice; a continuación, mientras el bosque contenga más de un árbol y para cada vértice v=1,2, …,n, por turno, se localiza la arista de menos peso que no una vértices del mismo árbol y que tenga uno de sus extremos en el árbol que contiene v.
¿Es correcto este algoritmo? ¿Qué estructuras de datos adicionales conviene usar para implementarlo y cúal sería el coste resultante para un grafo con n vértices y m aristas?. Justifica tus respuestas.

II.32. ¿Cómo puede variar el número de componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido al añadirle un nuevo arco? Justifica tu respuesta. Conviene emplear en el razonamiento el denominado grafo de componentes G^{sccc}. Dicho grafo tiene un vértice por cada componente fuertemente conexa del grafo original G. Existe un arco entre dos vértices de G^{sccc}, si existe un arco en G que une a dos vértices de las correspondientes componentes fuertemente conexas.

III. VORACES

En todos los ejercicios que siguen definir con precisión cual es el criterio de selección, diseñar el algoritmo voraz y demostrar la optimalidad de las soluciones obtenidas.

III.1. Deseamos almacenar en una cinta magnética de longitud L un conjunto de n programas $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Sabemos que cada P_i necesita un espacio a_i de la cinta y que

$$\left(\sum_{1 \le i \le n} a_i \right) > L$$

Construir un algoritmo que seleccione aquel subconjunto de programas que hace que el número de programas almacenado en la cinta sea máximo.

III.2. Diseñar un algoritmo para almacenar N programas de longitud l_i, $1 \le l_i \le H$ en una cinta magnética de forma que el tiempo medio de lectura de los mismos sea mínimo. Se supone que los programas se leen con igual frecuencia y que antes de leer cada programa se rebobina la cinta. Se entiende por tiempo medio de lectura:

$$\mathrm{T} = (1 / N) \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} l_i$$

III.3. Un *vertex cover* (recubrimiento de vértices) de un grafo no dirigido $G=(V,E)$ es un conjunto de vértices U, $U \subseteq V$, tal que cada arista del grafo G incide en, como mínimo, un vértice de U. Diseñar un algoritmo voraz que calcule el *vertex cover* de tamaño mínimo, si es que eso es posible. Comprobar si la estrategia elegida conduce siempre al óptimo. Repetir el mismo proceso pero para grafos que sean árboles.

III.4. Se han de procesar n tareas. Cada tarea i tiene un instante de terminacion t_i y un valor $v_i \ge 0$ si se procesa en dicho instante o antes. Se dispone de un sólo procesador que necesita sólo una unidad de tiempo para ejecutar cada tarea. Una solución factible es una secuencia S de tareas que cumplen las restricciones de terminación. Una solucion óptima es aquella que maximiza V tal que :

$$V = \sum_{s \in S} v_s$$

Diseñar un algoritmo voraz para encontrar la secuencia S.

III.5. Se han de procesar n tareas con instantes de terminación t_i y tiempo de proceso p_i . Se dispone de un procesador y las tareas no son interrumpibles. Una solución factible planifica todas las tareas de modo que terminan en, o antes de, su instante asignado. Diseñar un algoritmo voraz para encontrar la solución. Demostrar que, si existe solución, el algoritmo voraz la encuentra.

III.6. Dado un conjunto de n cintas cuyo contenido está ordenado y con n_i registros cada una, se han de mezclar por pares hasta lograr una única cinta ordenada. La secuencia en que se haga la mezcla determina la eficiencia del proceso. Diseñar un algoritmo voraz que minimice el número de movimientos.

Ejemplo : se han de mezclar 3 cintas: A con 30 registros, B con 20 y C con 10.

Opción 1 : - Mezclar A con B requiere 50 movimientos (se obtiene A')
- Mezclar A' con C requiere 60 movimientos
TOTAL = 110 movimientos

Opción 2 : - Mezclar C con B requiere 30 movimientos (se obtiene A')
- Mezclar A' con A requiere 60 movimientos
TOTAL = 90 movimientos.

III.7. Un automovilista ha de ir con su vehículo desde la población A hasta la población B siguiendo una ruta prefijada (por ejemplo la carretera N-340). Con el depósito completamente lleno puede hacer X km. El conductor conoce de antemano en qué lugares de la carretera existen gasolineras (la distancia entre dos gasolineras consecutivas es inferior a X km.). Diseñar un algoritmo que permita que el automovilista vaya de A a B repostando el *mínimo* número de veces posible (se supone que parte de A con el depósito lleno y que el coche no se averiará, ni tendrá un accidente, ni será abducido, etc. durante el trayecto). Indicar el coste del algoritmo y demostrar la optimalidad del criterio usado.

III.8. El informático megalómano comienza a estar harto de tener que esperar tanto rato para poder escuchar sus canciones favoritas en su extensa colección de casettes. Como no tiene suficiente dinero para comprarse un grabador de CD's ni tampoco quiere desperdiciar cinta ha decidido diseñar un algoritmo que dadas n canciones, sus respectivas duraciones en segundos (dur[i] es la duración de la canción i-ésima, $1\leq i\leq n$), y unas "frecuencias" de acceso (f[i] es la frecuencia de acceso a la canción i-ésima), encuentre la disposición de las n canciones que minimiza el tiempo medio de acceso. Es decir, el resultado del algoritmo es un vector pos que representa a una permutación de las n canciones, de tal modo que si $pos[j]$ es la canción que ocupa la posición j-ésima en la cinta entonces

$$\sum_{j\leq 1\leq n} \mathrm{f}[pos[j]] \quad \sum_{k\leq 1\leq j-1} \mathrm{dur}[pos[k]]$$

es mínima.
Nuestro informático megalómano no ha hecho IEA y ya empieza a desesperar. Hay que echarle una mano!

III.9. La jefatura de estudios de la BIF encara el siguiente problema cada cuatrimestre : una vez fijados los horarios de las n clases a impartir (una clase es una tripleta <*día_semana*,*hora_inicio*,*hora_fin*>) debe asignarse un aula a cada clase. El único requisito para que la asignación sea válida es que no puede haber dos clases el mismo día y a la misma hora que compartan aula. Hallar un algoritmo eficiente (polinómico en n) que encuentre una asignación válida de aulas a las clases de modo que se emplee el mínimo número de aulas posible.
Suponemos que la *hora_inicio* y la *hora_fin* de una clase son horas en punto o horas y media (ej: 10:30-12:30) y que una clase puede durar como mínimo media hora y no más de 4 horas. Ninguna clase acaba en un día diferente al día en que se inicia.

IV. VUELTA ATRÁS y RAMIFICACIÓN Y PODA

IV.1. Dissenyeu un algorisme que generi totes les configuracions de *n* reines en un tauler d'escacs d'ordre *n* de tal manera que no s'amenacin entre elles.

IV.2. Es disposa d'un tauler de *n* caselles i d'un cavall que pot moure's d'acord amb les regles del joc d'escacs. Es situa el cavall en una casella inicial qualsevol. Es demana un algorisme que trobi, si n'hi ha, un circuit de n^2 moviments del cavall de forma que cada casella del tauler sigui visitada exactament un cop i el darrer salt torni a la casella inicial.

IV.3. Es disposa de *c* colors diferents i d'un mapa de *n* països, junt amb una funció veï*(i,j)* que retorna cert quan dos països són veïns i fals en cas contrari. Escriure un algorisme que trobi totes les coloracions possibles del mapa amb la restricció que dos països veïns han de ser pintats de color diferent.

IV.4. Donats *n* números naturals, que poden estar repetits, es desitja trobar totes les combinacions d'aquests números, la suma dels quals és *S*.

IV.5. Dissenyeu un algorisme que generi totes les configuracions possibles de set dames en un tauler del joc de dames, de tal manera que no es matin entre si. Per simplificar el problema es considerarà que dues dames es maten si comparteixen la mateixa diagonal. Recordeu que en el joc de dames només s'usen quadres, i diagonals, d'un sol color.

IV.6. S'han de distribuir *n* convidats en una taula on hi ha lloc per *n* comensals. Es disposa d'una funció adj*(a,b)* que retorna cert si els llocs *a* i *b* són adjacents, i fals si no ho són. També hi ha una funció af*(k,l)* que retorna un valor comprès entre 0 i 5 segons el grau d'afinitat que els convidats *k* i *l* tinguin entre si (0 indica aversió profunda i 5 simpatia desbordant). Les funcions adj*(i,j)* i af*(k,l)* són simètriques.
Dissenyeu un algorisme que calculi la distribució de convidats a la taula que optimitza el seu benestar. Aquest benestar es calcularà sumant els afectes dels comensals asseguts en posicions adjacents.

IV.7. Disposem d'un tauler rectangular que medeix *AxB*, amb $1<A<B$, i de *k* peces idèntiques, també rectangulars, que medeixen *axb*, amb $1<a<b$. Es garanteix que l'àrea del tauler coincideix amb la de totes les peces, o sigui, $k \times a \times b = A \times B$.
Dissenyar un algorisme que trobi totes les maneres, si es que n'hi ha alguna, de cobrir el tauler amb les *k* peces de manera que no deixin forats ni se solapin, ni quedin, parcialment o totalment, fora del tauler.
Féu servir un TAD per les operacions d'inicialitzar el tauler, col.locar una peça, treure-la o comprovar si hi cap. Escollir una representació pel TAD, explicar que fa cada operació i com actua sobre la representació escollida. Suggerir mètodes per millorar l'eficiència, evitant de construir configuracions parcials que no puguin conduir a una solució, i per eliminar solucions redundants.

IV.8. Cal efectuar *n* feines diferents i disposem de *n* persones. El temps que triga la persona *p* en fer la feina *f* ve donat per la funció temps*(p,f)*. Es tracta d'assignar a cada persona una feina diferent de tal manera que es minimitzi el temps total que triguen les *n* persones a fer les *n* feines.

IV.9. El joc del dòmino té 28 fitxes diferents. Les fitxes són rectangulars i porten gravat a cada extrem un número entre *0* i *6*. Seguint les regles del joc, les fitxes es col.loquen formant una cadena de tal manera que cada parella de fitxes consecutives té iguals els números corresponents als extrems que es toquen. Un exemple de cadena correcta és el següent:

4	1	1	3	3			6	6	2	2	5

Dissenyar un algorisme que imprimeixi totes les cadenes correctes de longitut 28 que es poden formar amb les 28 fitxes del joc.

IV.10. Es disposa de p persones per efectuar n feines, $p<n$. La feina i requereix un temps t_i. Se suposa que totes les persones triguen el mateix en fer una feina concreta. Es dóna, també, una relació de precedència (un ordre parcial) entre les feines. Aquesta relació està disponible a través de la funció prec*(i,j)* que retorna cert si la feina i s'ha de fer, i acabar, abans decomençar la j. Fer un algorisme que trobi quina assignació de feines a persones (quina feina ha de fer cada persona i quan l'ha de començar) que respecta les precedències i minimitza el temps total. Advertiment : les persones no tenen perquè estar permanentment ocupades.

IV.11. Tenim una col.lecció de n objectes que cal empaquetar en envasos de capacitat C. L'objecte i té un volum v_i. Dissenyar un algorisme que calculi quin és l'empaquetament òptim, o sigui, aquell que minimitza el nombre d'envasos. Evidentment, els objectes no es poden fraccionar. Per simplificar el problema considerar que un objecte cap dins d'un envàs si el volum de l'objecte és igual o inferior a l'espai lliure que queda a l'envàs, o sigui, sense fer cas de la forma que l'objecte pugui tenir.

IV.12. Un cuadrado latino es un tablero de nxn posiciones, cada una de las cuales posee un color escogido entre n colores diferentes. Ha de cumplir la restricción de que no puede haber colores repetidos en ninguna de sus filas ni en ninguna de sus columnas. Un ejemplo con n=4 es:

A	B	C	D
D	C	A	B
C	D	B	A
B	A	D	C

Diseñar un algoritmo que imprima todos los posibles cuadrados latinos de tamaño nxn.

IV.13. Tenim dos conjunts disjunts A i B, de n elements cada un. Es demana trobar un conjunt de n parelles $<a,b>$, tals que $a\in A$ i $b\in B$, que satisfacin la restricció coneguda amb el nom de matrimonis estables. Suposeu que A és un conjunt d'homes i B és un conjunt de dones. Cada home i cada dona estableixen les preferències que tenen entre els seus possibles acompanyants, per exemple, numerant-los de 1 a n. Si s'escullen n parelles de manera que hi hagi algun home i alguna dona que, sense estar aparellats, es prefereixin mútuament a les seves parelles respectives, l'assignació és inestable. Si no hi ha cap parella d'aquest tipus l'assignació és estable. Desenvolupar un algorisme que trobi tots els aparellaments estables.

IV.14. Un viatjant ha de fer una visita a alguns dels seus clients que viuen en ciutats diferents. El viatjant vol dissenyar un itinerari que, sortint de la seva ciutat, passi un cop, i només un, per cada una de les ciutats on viuen els seus clients i retorni al punt de partida. A

més, el viatjant vol que el nombre de quilòmetres recorreguts sigui mínim. El viatjant encarrega a un alumne que li faci un programa per resoldre el seu problema.
Aquest problema es pot modelar amb un graf de la següent manera: donats *n* vèrtexs (que representen les ciutats) i *a* arestes (que representen el cost, infinit si no hi ha connexió, d'anar d'una ciutat a una altra) trobar el camí de cost mínim que passa una única vegada per tots els vèrtexs. Aquest camí rep el nom de camí hamiltonià mínim en honor del matemàtic irlandès del segle XIX Sir William Rowan Hamilton.

IV.15. Diez factorías de tecnología punta, recién creadas en la República Popular Socialista de Fanfanisflan, requieren una instalación informática y personal que la dirija. El Gobierno Supremo de la Nación les ha asignado diez máquinas y diez técnicos recién licenciados.
Pero no todas las máquinas son apropiadas para las necesidades de todas las empresas. Se dispone de una función booleana apropiada?*(m,e)* que indica si la máquina *m* es apropiada para la empresa *e*. Asimismo, no todos los técnicos conocen todas las máquinas, por lo que disponemos de una función booleana conoce?(*t,m)* que indica si el técnico *t* conoce la máquina *m*. Finalmente, no todos los técnicos aceptan trabajar en todas las empresas, debido a que algunas de ellas se relacionan con la industria bélica; disponemos de la previsible función booleana aceptaria?*(t,e)* que indica si el técnico *t* aceptaría trabajar en la empresa *e*.
Se pide un programa capaz de encontrar una manera de asignar a cada empresa una máquina apropiada a sus necesidades, y un técnico que conozca la máquina y que acepte trabajar en la empresa, si es que tal asignación existe; y lo indique adecuadamente si tal asignación no existe.

IV.16. El pressupost per comprar llibres d'una determinada organització és menor que la quantitat necessària per a l'adquisició de tots els llibres que vol comprar. Es desitja un algorisme que destriï la relació de llibres a comprar tenint en compte que:
(a) Es vol gastar la major part possible del pressupost.
(b) Mai es podrà pagar un import superior a la quantitat pressupostada.
(c) No hi ha cap llibre que es prefereixi a un altre.
(d) Es disposa de la llista completa dels llibres amb els seus preus.

IV.17. Disponemos de una baraja de cartas española con cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. De cada uno de los palos tenemos las siguientes cartas : 1,2,3,4,5,6,7,10,11 y 12. Diseñar un algoritmo que calcule todas las maneras posibles de obtener *7 y medio*.
Nota : Todas las cartas puntuan por su valor excepto el 10,11 y 12 que sólo valen medio punto.

IV.18. Al joc del 31 s'hi juga amb totes les cartes de la baralla espanyola, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 i 12 dels 4 colls (oros, copes, espases i bastons). Es tracta d'obtenir 31, fent valer cada carta pel seu número. Per obtenir exactament 31 calen si més no 3 cartes, per exemple : 12 d'oros, 12 de bastons i 7 de copes. Dissenyar un algorisme que calculi totes les combinacions possibles que facin 31.

IV.19. Un concurs consisteix en el següent: hi ha dos jocs de boles numerades des de *1* fins a *N*, un de boles negres i un de blanques; en total 2*N* boles. D'aquestes boles se'n col.loquen *N*, una per cada número, dins una capsa. Cada concursant fa una aposta sobre el color de quatre de les boles de la capsa, indicant número i color (e.g. la 1 negra, la 7 blanca, la 11 blanca i la 12 negra). En total hi ha *M* concursants. L'organitzador del joc, que és un trampós, vol calcular, un cop conegudes les *M* apostes, una combinació de les boles de la capsa tal que ningú no encerti les seves quatre prediccions. Dissenyar un algorisme que la calculi o bé que l'indiqui que no existeix.

IV.20. Quatre lladres volen robar uns determinats objectes exposats a la 'Expo de Sevilla'. Per tal de fer-ho pensen guardar el 'gènere' en caixes de cartró i passar per la porta como si fossin treballadors. Com això comporta certs riscs intentaran passar el mínim nombre de vegades per la porta. A més, no podem permetre's el fet de que una caixa plena se'ls trenqui degut a un excés de pes.
Si totes les caixes tenen un pes màxim permés de PMAX, i els pesos dels objectes a robar son en un vector PESOS: taula [1..*N*] de real, vol dissenyar-se un algoritme per tal de col.locar els objectes a les caixes de forma que cap d'elles es trenqui i que el nombre total de vegades que els individus passen per la porta sigui mínim. Cada individu només pot portar una caixa per viatge.

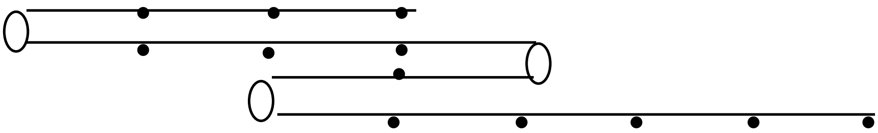
IV.21. La editorial *Tothop Ubliquem* está preparando una nueva reedición de las obras completas del prolífico escritor *Vaes Criuremassa*. Como es bien sabido, este escritor únicamente cultivó un género literario, el ensayo, y sus obras son todas de reducidas dimensiones: poco más o menos, cada una de sus obras ocupa *p* páginas.
En sus agudos escritos, este erudito ensayista desarrollaba siempre sorprendentes y curiosas relaciones entre temas aparentemente diversos. Es famoso, por ejemplo, su ensayo *El mito de Dione*, que muestra cómo la astrología medieval tiene sus orígenes en las costumbres de los navegantes fenicios y en la fauna de los desiertos africanos, y explica asimismo cómo influye después tanto en la pintura flamenca como en determinadas concepciones políticas del liberalismo de principios del siglo XX.

La editorial en cuestión se enfrenta al siguiente problema. La publicación habrá de consistir en varios volúmenes, lujosamente encuadernados para que queden bonitos en las bibliotecas de sedicentes intelectuales. Para que no sean demasiado gruesos, es preciso que todos los volúmenes contengan a lo más *j* ensayos.
Previas ediciones de estos escritos, organizadas cronológicamente o a veces sin criterio alguno, han resultado poco rentables. Con el fin de publicar una edición novedosa, la editorial quiere organizar los volúmenes de acuerdo con criterios temáticos, de manera que cada volumen esté dedicado a un tema. Es decir, todos los ensayos qe se publiquen en el mismo volumen han de tener al menos un tema en común, que es al que se dedica el volumen.

Se dispone de algo de software ya escrito para este proyecto. En concreto, existen módulos que implementan los tipos *obra*, *tema* y *lista_de_temas*, con las operaciones apropiadas para su manejo. Además existe una estructura de datos, trabajosamente recopilada, que soporta la operación *temas_de_que_trata*: dada una obra, proporciona la lista de los temas que se tratan en esa obra. Por ejemplo, la expresión :
temas_de_que_trata("El mito de Dione") devuelve la lista [astrología_medieval, costumbres_fenicias, fauna_africana, pintura_flamenca, liberalismo_del_siglo_XX].
Se pide:
(a) Aplicando el esquema de Ramificación y Poda, desarrollar un algoritmo capaz de encontrar una solución para el problema de editar las obras completas de *Vaes Criuremassa* que minimice el número de volúmenes.
(b) Resolver el mismo problema mediante un algoritmo basado en un esquema diferente. Exprimirse la mollera en busca de ideas chulas (NO vale un Vuelta Atrás ciego y sin marcaje).

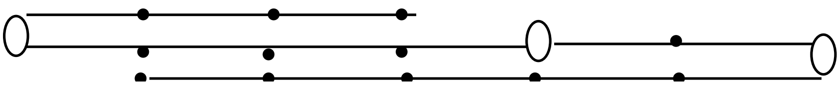
IV.22. Disponemos de una regla de carpintero un tanto inusual. Está compuesta por una serie de segmentos consecutivos y articulados y cada uno de ellos tiene una longitud asociada que no tiene porqué ser siempre la misma. Se trata de diseñar un algoritmo eficiente que indique

cómo hay que plegar la regla para que se minimice la longitud que ocupa una vez plegada. Justificad el esquema elegido.
Ejemplo clarificador : Supongamos que la regla se compone de 4 segmentos de longitudes 3,4,2,5 en esta secuencia que es inalterable. Una forma de plegarlo bastante intuitiva sería la que se muestra en la figura que viene a continuación:



Como puede apreciarse, la longitud que ocupa plegada es 7 y la solución sería {[s1,izq], [s2,der], [s3,izq], [s4,der]}

Sin embargo, plegándola como se indica en la siguiente figura se consigue una longitud de 6, que es la mínima, y que tiene como solución {[s1,izq], [s2,der], [s3,der], [s4,izq]}.



IV.23. Vamos a construir un circuito eléctrico usando como soporte una placa de dimensiones *A*x*B* (podemos pensar en la placa como si fuera una cuadrícula o una matriz con *A* filas y *B* columnas). Hemos de colocar en ella *N* componentes electrónicos (caben todos y cada uno ocupa una única posición) y disponemos de las siguientes matrices de datos para facilitar su colocación :
- Matriz CON (conexiones) : CON*(i,j)* contiene el número de conexiones que han de existir entre la componente *i* y la componente *j*.
- Matriz DIS (distancias) : DIS*(r,s)* contiene la distancia que existe entre la posición *r* y la posición *s* de la placa.
Diseñar un algoritmo que encuentre una asignación de componentes a posiciones tal que minimice la longitud del cable empleado. Justificar la eleccción del esquema elegido. La longitud del cable empleado es la suma de los productos CON*(i,j)*xDIS*(r,s)* donde la componente *i* ocupa la posición *r* y la componente *j* ocupa la *s*.

IV.24. Una matriz booleana M[1..*n*,1..*n*] representa un laberinto cuadrado. A partir de una casilla dada se puede llegar a las casillas adyacentes de la misma línea o columna. Además, si M[*i*,*j*]=FALSO, no se puede pasar por esa casilla; si M[*i*,*j*]=CIERTO se puede pasar.
a/ Diseñar un algoritmo que encuentre un camino, si hay alguno, de la casilla (1,1) a la (*n*,*n*).
b/ Modificar la solución anterior, si es necesario, para que en el caso de que exista camino encuentre el más corto.

IV.25. En pleno mes de Agosto se nos ha estropeado un congelador repleto de tarrinas de helados de diferentes sabores. Formalizando la situación: tenemos *N* tarrinas, una tabla T[1..*N*] de naturales que nos indica el tiempo que tarda en derretirse cada una de ellas y otra tabla Sabor[1..*N*], también de naturales, que nos indica el sabor asociado.
Además disponemos de la función placer*(i)*, que cuantifica el placer que nos produce comer un helado de sabor *i* , y con la función compatible*(i,j)* que será cierta si y sólo si podemos comer una tarrina de sabor *j* inmediatamente después de haber ingerido una de sabor *i*.
Suponemos que necesitamos una unidad de tiempo para devorar una tarrina y que empezamos a comer en el instante en que se estropea el congelador.
Hay que decidir la secuencia de helados que hemos de comer para que se maximice el placer obtenido. Hay que tener en cuenta que un helado no puede comerse si ya se ha derretido.

IV.26. Disponemos de N vasos diferentes con los que queremos construir una torre de modo que ésta tenga altura mínima. La torre se consigue apilando los N vasos invertidos, es decir, la abertura (boca) hacia abajo y el pie hacia arriba. Nos ofrecen las siguientes operaciones :

longitud : vaso ---> real /* devuelve la altura del vaso */

índice : vaso, torre_vasos ---> real /* Devuelve un valor entre 0 y 100 que es el % de la altura de *torre_vasos* que queda dentro de *vaso* al intentar apilar *vaso* sobre *torre_vasos* */

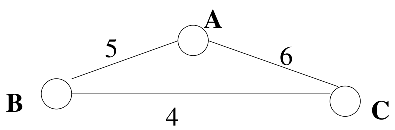
Diseñar un algoritmo, justificando el esquema utilizado, que encuentre la solución del problema planteado.

IV.27. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido, completo y etiquetado con $n=|V|$. Las etiquetas pertenecen a los naturales. Se dispone de la operación etiq : *vértice*, *vértice* ---> *nat*, que dados dos vértices del grafo devuelve un natural que es la etiqueta de la arista. Se trata de generar una *secuencia*, que denominaremos S, con todos los vértices del grafo tal que sea mínima la siguiente suma de productos :

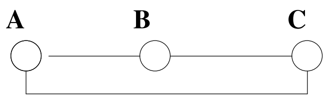
$$[\text{MIN}] \sum_{\forall i, j\,:\, 1 \le i < j \le n} |i - j| \cdot \text{etiq}(S(i), S(j))$$

donde $S(i)$ es el vértice que ocupa la posición i en la secuencia devuelta. Diseñar un algoritmo que calcule la secuencia de suma mínima. Calcular su coste y justificar la corrección de la solución propuesta.

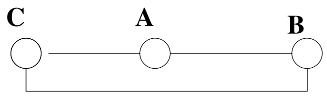
Ejemplo. Dado el grafo completo de grado 2 que viene a continuación :



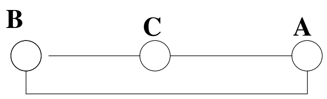
Las tres posibles sumas diferentes son :



SUMA = 5+4+(2.6)= 21



SUMA = 6+5+(2.4) = 19



SUMA = 4+6+(2.5) = 20

De las 3 sumas distintas la solución sería la segunda que es la de suma mínima.

IV.28. Dados 2 grafos no dirigidos, $G=(V,E)$ y $H=(N,A)$, con idéntico número de vértices escribir un algoritmo, dando todo lujo de detalles, que determine si G y H son *isomorfos* o no lo son. Determinar el coste del algoritmo y justificar el esquema que se ha utilizado en su resolución.

Se dice que dos grafos son *isomorfos* sii :

- a cada vértice $u \in V$ le corresponde un único vértice $\prod(u) \in N$ y a la inversa,
- a cada arista $(u,v) \in E$ le corresponde una única arista $(\prod(u),\prod(v)) \in A$ tal que $\prod(u)$ es el vértice que le corresponde a u y $\prod(v)$ es el que le corresponde a v.

Dicho de otro modo, dos grafos son *isomorfos* si existe una permutación $\prod : V \rightarrow N$ tal que $(u,v) \in E \Leftrightarrow (\prod(u),\prod(v)) \in A$.

IV.29. La compañía Timofónica ha recibido el encargo de ubicar cabinas telefónicas en el recién construído campus de Felsdetellcas. Todos los posibles puntos de ubicación para las cabinas y las distancias entre ellos se conocen; también se sabe cuál es el coste de instalar una cabina. Toda esta información está disponible en una matriz *dist*, y un vector *cost*:
dist[*i, j*] = distancia (> 0) entre las ubicaciones i y j, $1 \le i \le j \le n$;
cost[*i*] = coste de instalar una cabina en el punto i, $1 \le i \le n$.
El contrato establece que desde cualquier punto (de los n identificados) hasta la cabina más proxima no puede haber una distancia superior a D. A Timofónica le interesa hallar las ubicaciones en las cuáles colocar cabinas de manera que se cumplan las condiciones del contrato, pero que minimice los costes de instalación, pues no confía en la rentabilidad de la operación, que sólo aceptó por una cuestión de imagen. Diseñad un algoritmo que solucione el problema.

IV.30. *Problema de la reconstrucción de distancias.* Se nos da un conjunto de $N = n(n-1)/2$ valores que representan a las distancias entre n puntos ubicados sobre una línea. El problema consiste en hallar los valores $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que dan origen a las N distancias dadas o bien determinar que no es factible colocar los n puntos sobre la recta de manera que las distancias mutuas sean las dadas. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 = 0$. Por ejemplo, si D={ 2, 4, 5, 6, 7, 11 } ($N = 6$, $n = 4$) una solución posible es x_1=0, x_2=5, x_3=7 y x_4=11.

IV.31. Tenemos un sistema constituído por n dispositivos conectados en serie, de manera que el dispositivo D_i se conecta al dispositivo D_{i+1}, $1 \le i < n$. Sea f_i ($0<f_i\le 1$) la fiabilidad del dispositivo D_i (es decir, la probabilidad de que funcione correctamente). Entonces la fiabilidad del sistema es

$$f = \prod_{1\le i\le n} f_i$$

Aunque cada dispositivo sea muy fiable, la fiabilidad del sistema puede ser bastante menor (p.e. si n=10 y f_i =0.99 para $1\le i\le n$, tenemos $f \approx 0.904$). Para aumentar la fiabilidad decidimos modificar el sistema de modo que la fase i-ésima está compuesta por m_i>1 réplicas del dispositivo D_i (en el sistema original m_i =1). La fiabilidad de la fase i viene dada por $\phi_i(m_i)$, donde las funciones ϕ_i satisfacen las siguientes propiedades : 1) $\phi_i(1)=f_i$; 2) $\phi_i(m) < \phi_i(m')$ si $m < m'$; 3) $\lim_{m\to\infty} \phi_i(m)= 1$. Ahora la fiabilidad del sistema es

$$f = \prod_{1\le i\le n} \phi_i(m_i)$$

De la propiedad (3) de las ϕ_i se desprende que podemos acercar la fiabilidad de la fase i a 1 tanto como queramos (y otro tanto podemos decir de f), colocando más y más réplicas de D_i. Pero la vida no es tan fácil … Cada dispositivo D_i nos cuesta c_i euros y el coste total del sistema no puede superar E euros, por lo que tendremos que decidir cuidadosamente cuántos dispositivos ponemos en cada fase. Supondremos que $E \ge c_1+\ldots+c_n$. Además, por razones diversas (*stock* disponible, solvencia del fabricante, etc.), puede estar limitado el número de unidades del dispositivo i que se pueden usar.
Diseñad un algoritmo que dados dos vectores $C[1..n]$ y $F[1..n]$ con los costes y fiabilidades de los dispositivos, un valor real E>0, un vector $B[1..n]$ con el máximo de unidades disponibles de cada dispositivo y una función **phi**(i,F,m) que calcula $\phi_i(m)$, halle el vector $m[1..n]$ tal que la fiabilidad del sistema es máxima sin que su coste exceda el valor E y

dentro de los límites de suministros representados por el vector *B*. (*B*[*i*]=+ ∞ si tenemos un suministro potencialmente ilimitado de unidades del dispositivo *i*).

V. MISCELÁNEA

V.1. Tenemos un tablero de NxN casillas y una ficha situada en la esquina superior izquierda, sobre la casilla *(1,1)*. Se pretende llevar la ficha a la esquina opuesta, es decir la *(N,N)*. Los únicos movimientos posibles son desplazar la ficha una casilla hacia abajo o una casilla hacia la derecha. En el tablero hay casillas normales y casillas especiales. Que la ficha pase por una casilla normal cuesta 1 y que pase por una casilla especial tiene coste 2. Se sabe que hay S casillas especiales repartidas por el tablero.
Prononer un algoritmo que encuentre un camino de coste mínimo entre las dos casillas fijadas. Justificar el esquema elegido así como su coste y todas las decisones tomadas.

V.2. Disponemos de un juego de fichas de dominó con las tradicionales 28 fichas. Supongamos que nos entregan N fichas al azar tal que $2<N<28$ y que de esas N fichas se fijan dos cualesquiera (ficha origen y ficha destino), colocadas de una cierta manera, como extremos de una cadena.
El problema que se nos plantea es el siguiente : Devolver una secuencia de fichas de longitud mínima tal que permita pasar de la ficha origen a la destino satisfaciendo las reglas del dominó para formar la secuencia. Si la secuencia no existe devolver la secuencia vacía.
Diseñar una algoritmo para resolver el problema indicando, además, qué esquemas podían aplicarse, cuál es el elegido y el motivo de su elección.

V.3. Sea a un vector , $a[1..n]$, de elementos con $n>0$. Se dice que un vector es mayoritario si tiene un elemento mayoritario y se dice que un elemento x es mayoritario en el vector a cuando más de la mitad de los elementos del vector son iguales a x. Formalmente, si existe un x tal que $(\mathrm{N}i : 1 \leq i \leq n : a[i]=x) > n/2$, entonces x es elemento mayoritario y, por tanto, el vector es mayoritario. Como es evidente, si el vector es mayoritario, sólo existe en él un único elemento mayoritario.

(a) Supongamos que existe una relación de orden entre los elementos que figuran en el vector. Queremos determinar si un vector dado es mayoritario o no y, caso de que lo sea, saber cuál es ese elemento. ¿Qué algoritmo, de los vistos en clase, habría que utilizar para conseguir resolver este problema con un coste $O(n)$?. Identificar claramente el algoritmo final y justificar la respuesta indicando, por ejemplo, porqué hace falta que exista una relación de orden entre los elementos.

(b) Supongamos ahora que ya no tenemos una relación de orden entre los elementos y que la única operación disponible para comparar los elementos del vector es la igualdad. Diseñar un algoritmo que, con coste $O(n \cdot log\ n)$, resuelva el mismo problema que se plantea en a/ (Obviamente no se puede ordenar el vector a). Indicar el esquema empleado, justificar la corrección y determinar su coste.

V.4. Sea S una secuencia de naturales no repetidos tal que *longitud(S)=n* con $n \geq 0$. Se pide diseñar un algoritmo que calcule la tira creciente de naturales, contenida en S, de mayor longitud. Una tira es una secuencia formada por elementos que aparecen en la secuencia de entrada tal que se mantiene el orden de aparición pero no la posición en la que aparecen. *Ejemplo* : sea $S=\{7,2,1,9,5,6,11,14,8\}$ la secuencia de entrada. Algunas de las tiras crecientes que se pueden obtener a partir de ella son :

T1={7,9,11,14}, T2={2,9,11,14}, T3={2,5,6,11,14}, T4={2,5,6,8}, T5={1,9,11,14}, T6={1,5,6,11,14} siendo, en este caso, T3 y T6 las de mayor longitud (5 elementos) de todas las posibles.
Para resolver este problema se pueden utilizar las operaciones típicas sobre secuencias. Identificar y justificar claramente el esquema elegido. Introducir todas las mejoras de eficiencia que sean posibles. Explicar todas las operaciones, con código incluido, si es necesario, así como todas las estructuras de datos utilizadas.

V.5. Se ha de organizar el horario de un campeonato entre n jugadores. Cada uno ha de jugar exactamente una vez contra cada adversario. Además, cada jugador ha de jugar exactamente un partido diario. Suponiendo que n es potencia de 2, diseñar e implementar un algoritmo que construya el horario y permita terminar el campeonato en n-1 días. Indicar el esquema utilizado. Analizar el coste del algoritmo.

V.6. Diseñad un algoritmo que determine si un grafo no dirigido y conexo G contiene un *cuadrado* como subgrafo (*i.e.* determinad si G contiene al menos un ciclo de longitud 4). Se valorará positivamente que la solución propuesta tenga coste $O(n \cdot e)$, donde n es el número de vértices de G y e es el número de aristas, si bien se considerarán aceptables soluciones cuyo coste sea más elevado en caso peor.
Pista (para obtener una solución "astuta"): Pensad en primer lugar el algoritmo suponiendo que el grafo G viene dado a través de su matriz de adyacencia. Aplicad una idea similar sobre un grafo implementado con listas de adyacencia para obtener una versión más eficiente.

V.7. Dado un conjunto de probabilidades de acceso $\{p_1, \ldots, p_n\}$ a un conjunto de elementos $X=\{x_1<x_2<\ldots<x_n\}$ podemos construir un árbol binario de búsqueda T^* para X tal que el coste medio de búsqueda :

$$C(T^*) = 1 + \sum_{1\leq i \leq n} p_i \cdot \text{profundidad}(x_i, T^*),$$

sea mínimo, empleando el esquema de programación dinámica. Es decir, los elementos más accedidos se encuentran a menor profundidad que los elementos poco accedidos, de tal modo que si multiplicamos lo que nos cuesta acceder a x_i en T^* por su probabilidad de acceso p_i y sumamos para toda i, la mejor estructuración posible es el árbol T^*.
Sin embargo, el coste del algoritmo de programación dinámica es $\theta(n^2)$ (tanto en tiempo como en espacio), y preferiríamos un algoritmo de coste $o(n^2)$ aunque el árbol construido no sea necesariamente óptimo. Eso sí, el algoritmo debería tener en consideración los pesos : no vale cosntruir un árbol que sea perfecta o casi perfectamente equilibrado independientemente de los p_i's. Diseña al menos un algoritmo con estas características (eficiencia, suboptimalidad, dependencia del conjunto de probabilidades). Analiza su eficiencia, justifica que efectivamente construye(n) árboles binarios de búsqueda y razona el porqué de la "heurística" en la que se basa(n). Es decir, aporta alguna buena razón para suponer que en general se generarán árboles con costes medios de acceso cercanos al óptimo.

V.8. Se denomina *arbitraje* al uso de las discrepancias en las tasas de cambio de divisas para obtener un beneficio. Por ejemplo, durante un corto espacio de tiempo puede suceder que un euro (1 €) valga 0.95 dólares, un dólar valga 0.75 libras esterlinas y una libra esterlina valga 1.45 €. Entonces partiendo de 1 € podemos terminar con :

1 € = 1 € x (0.95 US$ / 1 €) x (0.75 £ / 1 US$) x (1.45 euro / 1 £) = 1.033125 €,

con un beneficio neto de algo más del 3.3%. Suponed que hay n tipos distintos de moneda y que se dispone de una tabla C[1..n,1..n] donde C[i,j] es la tasa de cambio de (una unidad de) la divisa i a la divisa j. Por ejemplo si el euro es la divisa 1 y la libra esterlina la divisa 2 entonces C[2,1]=1.45. Se cumple que C[i,j]=1/C[j,i] para toda i y j y que C[i,i]=1. Diseñad un algoritmo de programación dinámica que dada la tabla C y el identificador i de una divisa, $1 \le i \le n$, nos proporcione el valor del mejor arbitraje, donde el mejor arbitraje es una secuencia $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de identificadores distintos entre sí y distintos de i tal que su valor $C[i,i_1]\cdot C[i_1,i_2]\cdot\ldots\cdot C[i_{k-1},i_k]\cdot C[i_k,i]$ es máximo. Analizad el coste del algoritmo.

V.9. Dados un vector A[1..n] de elementos (n>0) y un vector ω[1..n] de pesos asociados (números reales positivos), que satisface $\sum_{1\le i \le n} \omega[i] = 1$, la *mediana ponderada de* A es el mayor elemento x = A[j] tal que

$$\sum_{A[l] < x} \omega[l] < \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{A[r] \ge x} \omega[r] \ge \tfrac{1}{2}$$

es decir, es el mayor elemento x de A tal que la suma de los pesos asociados a los elementos menores que x es < ½ y la suma de los pesos asociados a los elementos mayores o iguales que x es ≥ ½. Escribid el pseudocódigo de un algoritmo eficiente (al menos, su coste en caso medio tendría que ser inferior a $n \log n$) para hallar la mediana ponderada de A y analizad el coste.

V.10. El famoso terrorista Nib Nedal ha organizado su red terrorista de tal modo que cada miembro de la red sólo conoce y contacta con unos pocos terroristas (entre dos y cuatro, típicamente). Cada par de terroristas que se conocen ha convenido un procedimiento para intercambiar órdenes, mensajes, instrucciones, etc. El tiempo que tarda en llegar un mensaje de uno a otro depende obviamente del procedimiento elegido. Sólo Nib Nedal conoce la estructura completa de la red, procedimientos y tiempos para el intercambio de información, etc., pero por lo demás está integrado en la red como uno más.

(a) Propon un modelo adecuado para la red terrorista.

(b) Describe con detalle un algoritmo eficiente que, dada una representación adecuada de la red terrorista y un entero t>0, determine cómo puede Nib Nedal distribuir un mensaje de modo que alcance a todos los terroristas posibles en un tiempo no superior a t; el mensaje debe llegar a cada terrorista en el menor tiempo posible (si es que puede llegarle); y si existiesen varias alternativas para que el mensaje llegue a un terrorista dado entonces debe proponerse la que use el menor número de contactos posible.

V.11. *Primero hay que leerse el V.10.* Supongamos que la red terrorista de Nib Nedal tiene 2N terroristas. Ahora Nib Nedal quiere subdividir su red de terroristas en dos subredes de N terroristas cada una, de manera que, respetando la estructura de la red original, el número de contactos entre terroristas pertenecientes a subredes distintas sea mínimo. Describe un algoritmo, dando todo lujo de detalles, que resuelva el problema.