Complexitat: material complementari

Antoni Soto i Riera

25 d'octubre de 2005

1 Funció de cost (temps)

Sigui N la mida (o grandària) de les dades, la funció de cost $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es calcula com segueix:

1. Cost d'avaluar expressions.
   (a) Cost $T_V(N)$ d'avaluar una expressió formada per un valor, una constant o una variable V:
   $$T_V(N) = T_V$$
   on $T_V \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Cost $T_{\odot E}(N)$ d'avaluar una expressió formada per un operador unari $\odot$ aplicat a una expressió E:
   $$T_{\odot E}(N) = T_{\odot} + T_E(N)$$
   on $T_{\odot} \in \mathbb{R}^+$ i $T_E(N)$ és el cost d'avaluar l'expressió E.
   (c) Cost $T_{E_1 \oplus E_2}(N)$ d'avaluar una expressió formada per un operador binari $\oplus$ aplicat a dues expressions E_1 i E_2:
   $$T_{E_1 \oplus E_2}(N) = T_{E_1}(N) + T_{\oplus} + T_{E_2}(N)$$
   on $T_{\oplus} \in \mathbb{R}^+$, i $T_{E_1}(N)$ i $T_{E_2}(N)$ són el cost d'avaluar les expressions E_1 i E_2 respectivament.
   (d) Cost $T_{F(E_1,\ldots,E_l)}(N)$ d'avaluar una expressió formada per la crida a una funció de nom F amb l paràmetres actuals corresponents a les expressions $E_1, \ldots, E_l$:
   $$T_{F(E_1,\ldots,E_l)}(N) = T_F(N) + T_{E_1}(N) + \cdots + T_{E_l}(N)$$
   on $T_F(N)$ és el cost d'executar l'algorisme que implementa la funció F i $T_{E_i}(N)$ per $1 \leq i \leq l$ és el cost d'avaluar l'expressió E_i.

2. Cost $T_{V:=E}(N)$ d'executar l'assignació a la variable V del valor de l'expressió E:
   $$T_{V:=E}(N) = T_{:=} + T_E(N)$$
   on $T_{:=} \in \mathbb{R}^+$ i $T_E(N)$ és el cost d'avaluar l'expressió E.

3. Cost $T_{A(E_1,\ldots,E_l,V_1,\ldots,B_m)}(N)$ d'executar la crida a l'acció de nom A amb les expressions $E_1, \ldots, E_l$ com a paràmetres actuals d'entrada i les variables $V_1, \ldots, V_m$ com a paràmetres actuals de sortida o d'entrada/sortida:
   $$T_{A(E_1,\ldots,E_l,V_1,\ldots,B_m)}(N) = T_A(N) + T_{E_1}(N) + \cdots + T_{E_l}(N)$$
   on $T_A(N)$ és el cost d'executar l'algorisme que implementa l'acció A i $T_{E_i}(N)$ per $1 \leq i \leq l$ és el cost d'avaluar l'expressió E_i.

4. Cost $T_{A_1;A_2}(N)$ d'executar la composició seqüencial de les accions A_1 i A_2:

$$T_{A_1;A_2}(N) = T_{A_1}(N) + T_{A_2}(N)$$

   on $T_{A_1}(N)$ i $T_{A_2}(N)$ són el cost d'executar les accions A_1 i A_2 respectivament.

5. Cost $T_{\textbf{si}\ E_1 \longrightarrow A_1 | \cdots | E_l \longrightarrow A_l\ \textbf{fsi}}(N)$ d'executar la composició alternativa amb proteccions E_i i accions A_i per $1 \leq i \leq l$:

$$T_{\textbf{si}\ E_1 \longrightarrow A_1 | \cdots | E_l \longrightarrow A_l\ \textbf{fsi}}(N) = T_{E_1}(N) + \cdots + T_{E_l}(N) + \max\{T_{A_1}(N), \ldots, T_{A_l}(N)\}$$

   on $T_{E_i}(N)$ i $T_{A_i}(N)$ per $1 \leq i \leq l$ són el cost d'avaluar l'expressió E_i i el cost d'executar l'acció A_i respectivament.

6. Cost $T_{\textbf{mentre}\ E\ \textbf{fer}\ A\ \textbf{fmentre}}(N)$ d'executar la composició iterativa amb protecció E i acció A:

$$T_{\textbf{mentre}\ E\ \textbf{fer}\ A\ \textbf{fmentre}}(N) = f(N) \cdot (T_E(N) + T_A(N))$$

   on $f(N)$ és el nombre d'iteracions, $T_E(N)$ és el cost d'avaluar l'expressió E i $T_A(N)$ és el cost d'executar l'acció A.

2 Propietats d'$\mathcal{O}$

El conjunt de les funcions que creixen com a molt com f es defineix com segueix:

$$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, c_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tals que } \forall\, n \geq n_0 \quad g(n) \leq c_0 \cdot f(n)\}$$

D'aquesta definició s'en deriven les propietats que s'enumeren a continuació. Per tota funció de cost, per exemple,

$$\forall f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

es compleix:

1. Invariància multiplicativa.

$$\forall c \in \mathbb{R}^+\ g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow c \cdot g \in \mathcal{O}(f)$$

2. Invariància additiva.

$$\forall c \in \mathbb{R}^+\ g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow c + g \in \mathcal{O}(f)$$

3. Reflexivitat.

$$f \in \mathcal{O}(f)$$

4. Transitivitat.

$$h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$$

5. Criteri de caracterització.

$$g \in \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$$

6. Regla de la suma.

$$g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$$

   on la funció suma de funcions es defineix com $(g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x)$ i la funció màxim de funcions es defineix com $(\max(f_1, f_2))(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$.

7. Regla del producte.

$$g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$$

   on la funció producte de funcions es defineix com $(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$.

3 Cost asimptòtic

Aplicant les propietats de la notació $\mathcal{O}$, veieu la Secció 2, a cada una de les regles de càlcul de la funció de cost, veieu la Secció 1, obtenim el cost asimptòtic de cada una de les construccions del llenguatge.

1. Cost asimptòtic d'avaluar expressions.

   (a) Com que $T_V \in \mathcal{O}(1)$, el cost asimptòtic d'avaluar una expressió formada per un valor, una constant o una variable V és

   $$T_V(N) \in \mathcal{O}(1)$$

   (b) Com que $T_\odot \in \mathcal{O}(1)$ i aplicant la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'avaluar una expressió formada per un operador unari $\odot$ aplicat a una expressió E és

   $$T_{\odot E}(N) \in \mathcal{O}(T_E(N))$$

   (c) Com que $T_\oplus \in \mathcal{O}(1)$ i aplicant la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'avaluar una expressió formada per un operador binari $\oplus$ aplicat a dues expressions E_1 i E_2 és

   $$T_{E_1 \oplus E_2}(N) \in \mathcal{O}(\max\{T_{E_1}(N), T_{E_2}(N)\})$$

   (d) Per la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'avaluar una expressió formada per la crida a una funció de nom F amb l paràmetres actuals corresponents a les expressions $E_1, \ldots, E_l$ és

   $$T_{F(E_1,\ldots,E_l)}(N) \in \mathcal{O}(\max\{T_F(N), T_{E_1}(N), \ldots, T_{E_l}(N)\})$$

2. Com que $T_{:=} \in \mathcal{O}(1)$ i aplicant la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'executar l'assignació a la variable V del valor de l'expressió E és

   $$T_{V:=E}(N) \in \mathcal{O}(T_E(N))$$

3. Per la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'executar la crida a l'acció de nom A amb les expressions $E_1, \ldots, E_l$ com a paràmetres actuals d'entrada i les variables $V_1, \ldots, V_m$ com a paràmetres actuals de sortida o d'entrada/sortida és

   $$T_{A(E_1,\ldots,E_l,V_1,\ldots,B_m)}(N) \in \mathcal{O}(\max\{T_A(N), T_{E_1}(N), \ldots, T_{E_l}(N)\})$$

4. Per la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'executar la composició seqüencial de les accions A_1 i A_2 és

   $$T_{A_1;A_2}(N) \in \mathcal{O}(\max\{T_{A_1}(N), T_{A_2}(N)\})$$

5. Per la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'executar la composició seqüencial amb proteccions E_i i accions A_i per $1 \leq i \leq l$ és

   $$T_{\textbf{si}\ E_1 \longrightarrow A_1 | \cdots | E_l \longrightarrow A_l\ \textbf{fsi}}(N) \in \mathcal{O}(\max\{T_{E_1}(N), \ldots, T_{E_l}(N), T_{A_1}(N), \ldots, T_{A_l}(N)\})$$

6. Per la regla dels productes i la regla de les sumes, el cost asimptòtic d'executar la composició iterativa amb protecció E i acció A és

   $$T_{\textbf{mentre}\ E\ \textbf{fer}\ A\ \textbf{fmentre}}(N) \in \mathcal{O}(f(N) \cdot \max\{T_E(N), T_A(N)\})$$