Inteligencia Artificial
Lógica difusa

Primavera 2007

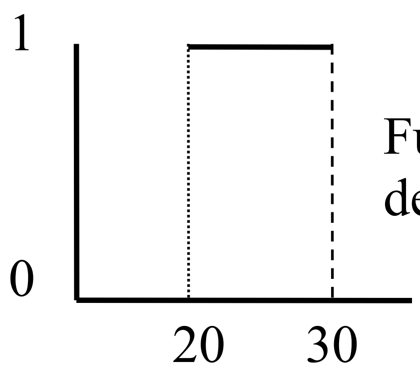
profesor: Luigi Ceccaroni

El modelo posibilista

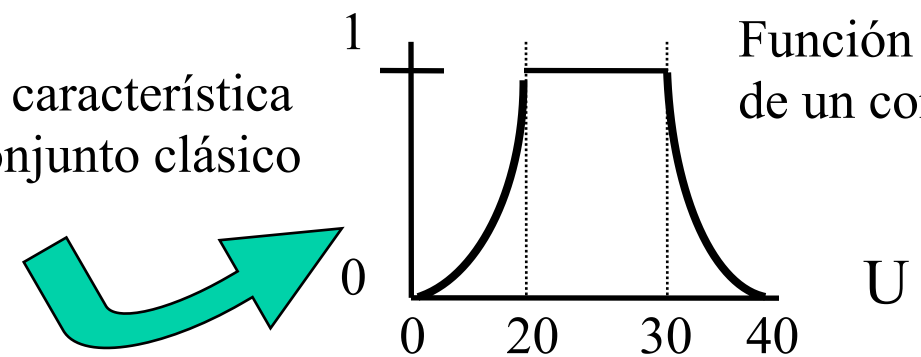
- El modelo posibilista (o teoría de la posibilidad) está basado en los conjuntos difusos de Zadeh (1965).
- El objetivo es modelar los grados de veracidad, la imprecisión o la vaguedad contenidas en proposiciones como:
  - La temperatura es **alta**.
  - Hay que girar **un poco** a la derecha.
  - Es **muy seguro** que tenga hepatitis.
  - La hipótesis H1 es **muy poco posible**.

Conjuntos difusos

- Un conjunto difuso es una generalización de la noción de conjunto, donde la **función característica** es una función continua del **dominio U** a [0,1].



Función característica de un conjunto clásico



Función característica de un conjunto difuso

$$\mu(u) : U \rightarrow [0, 1]$$

Función característica

- La **función característica** (π_A) indica la **posibilidad** de que un valor u, u$\in$U,

  compatible con la variable X, sea A, sabiendo que [X es A] corresponde al grado de pertenencia en el conjunto difuso representado por la etiqueta A.

Posibilidad y grado de veracidad

- Cada variable tiene un dominio (U).
- Se usan etiquetas lingüísticas para representar una **distribución de posibilidad** sobre estos valores.
- Dependiendo de la distribución de posibilidad, cada valor de la variable es, respecto a la etiqueta:
  - **cierto**
  - **imposible** (falso)
  - **posible hasta cierto punto**

Posibilidad y grado de veracidad

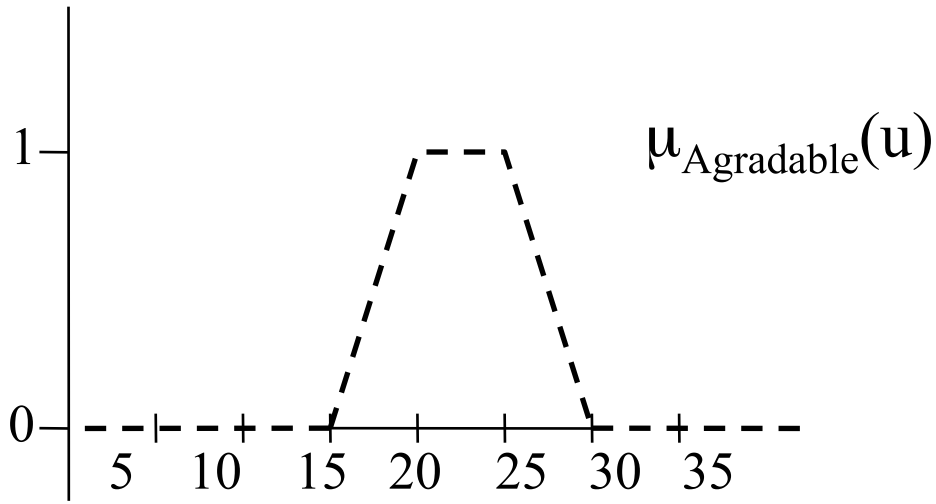
- Los hechos difusos se representan siguiendo el esquema:

  [X es A]

  que define un **conjunto difuso** sobre U donde:
  - X es una **variable** sobre el dominio U.
  - A es un **término lingüístico** aplicable a X que restringe sus valores.

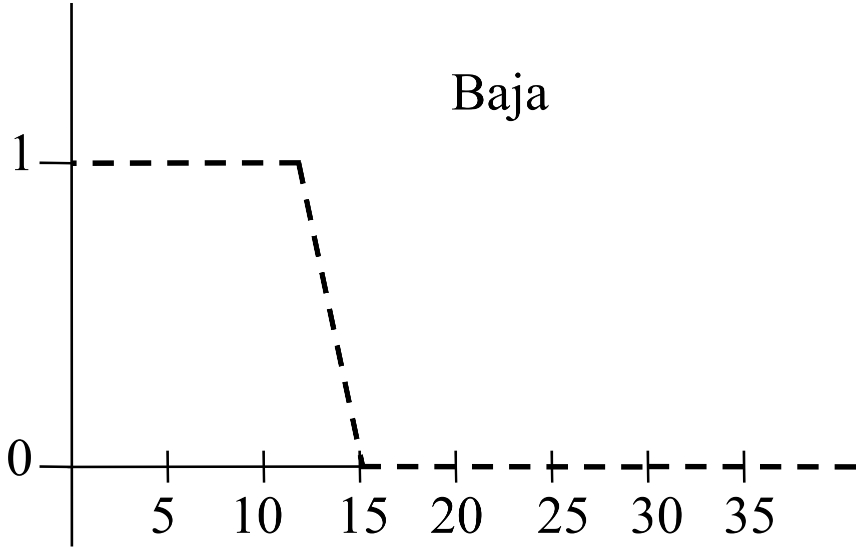
Posibilidad y grado de veracidad

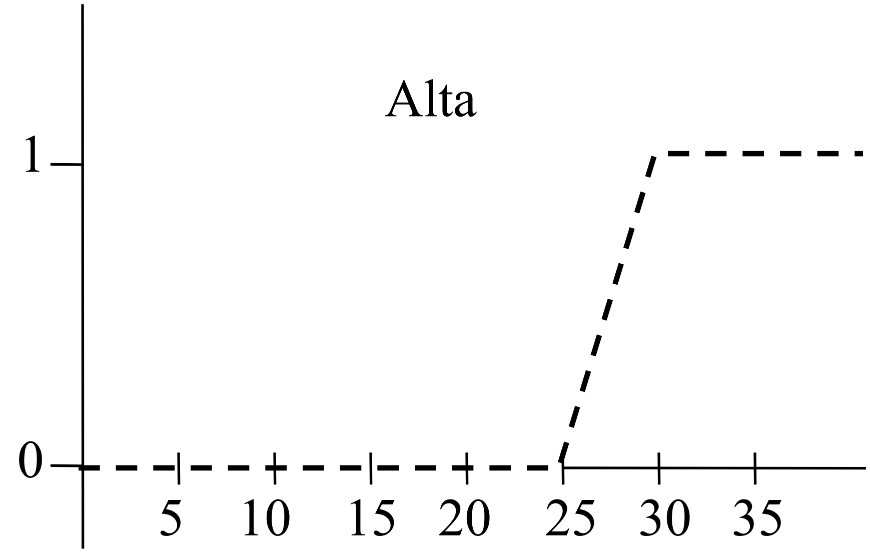
- Ejemplo:
  - La temperatura es **agradable**
    - Variable: temperatura
    - Dominio (o universo de valores): recta real
    - La etiqueta **agradable** es la distribución



Posibilidad y grado de veracidad

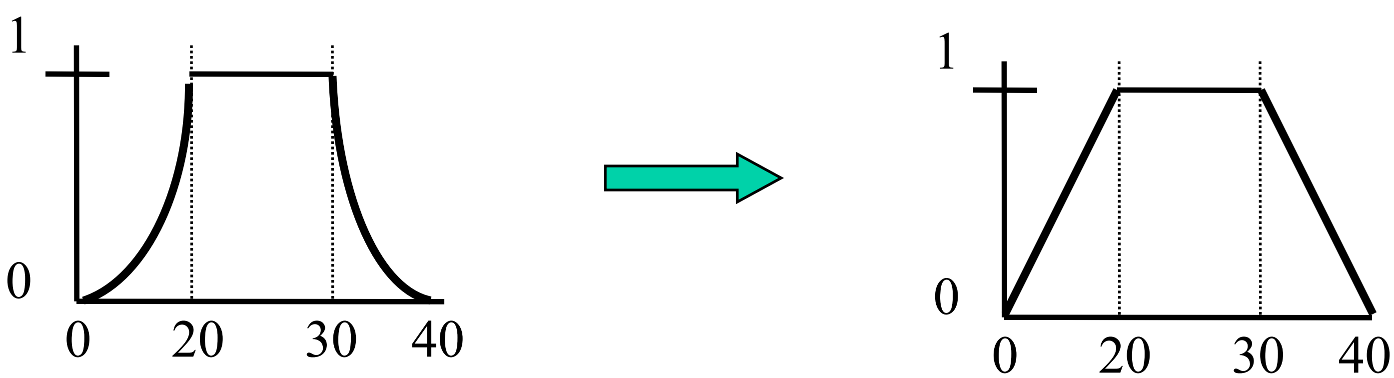
- Ejemplos:
  - La temperatura es baja
  - La temperatura es alta





Representació pràctica de conjunts difusos (1)

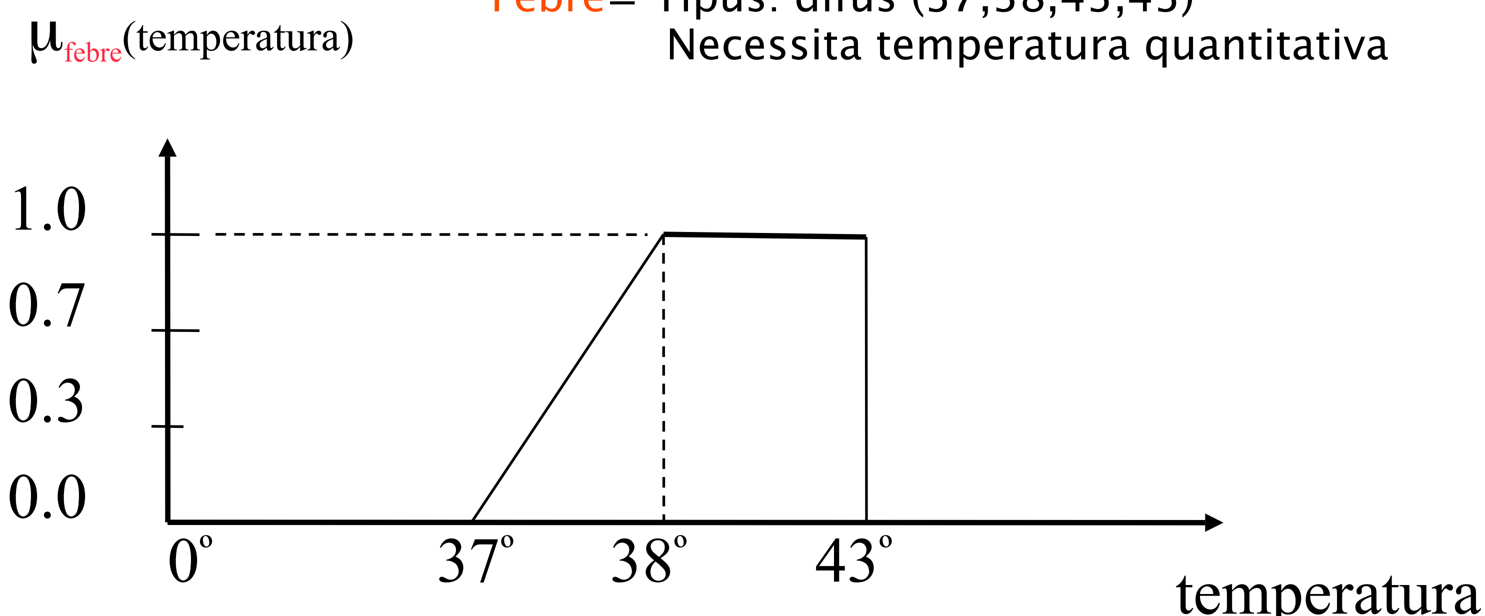
Sovint la **funció característica** s'aproxima per una funció *amb forma trapezoïdal* (*o triangular*) que es pot caracteritzar amb les abscisses dels 4 (o 3) vèrtexs.



Representació pràctica de conjunts difusos (2)

Conjunt difús que representa el concepte *febre*

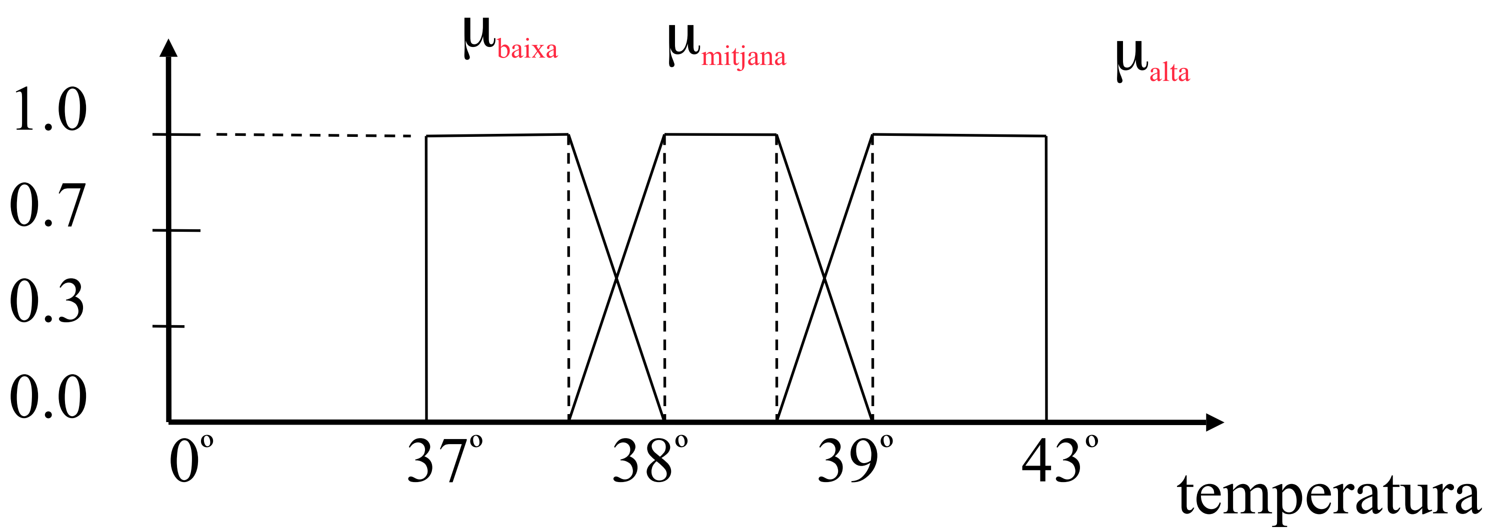
Febre= Tipus: difús (37,38,43,43)
Necessita temperatura quantitativa



Representació pràctica de conjunts difusos (3)

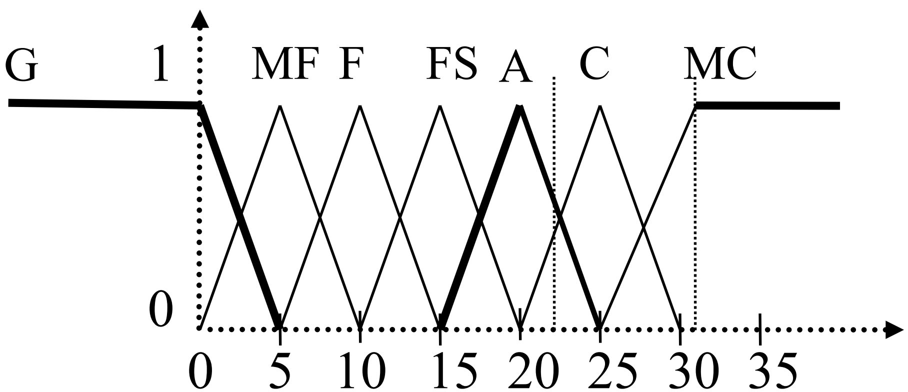
Grau de febre= Tipus: (b “baixa” (37,37,37.6,38),
(m “mitjana” (37.6,38, 38.5,39),
(a “alta” (38.5,39,43,43))
Relació: necessita temperatura quantitativa

μ_{febre}(temperatura)



Conjunts difusos que representen diferents graus del concepte *febre*

Representació pràctica de conjunts difusos (4)

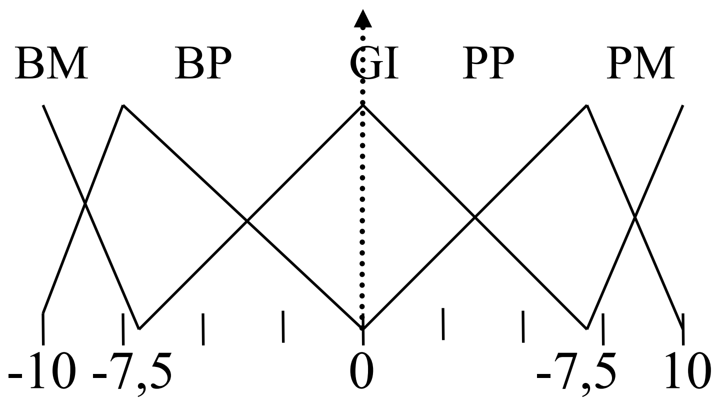


- [Temperatura és Gelada]
- [Temperatura és Molt Freda]
- [Temperatura és Freda]
- [Temperatura és Fresca]
- [Temperatura és Agradable]
- [Temperatura és Calorosa]
- [Temperatura és Molt Calorosa]

· Cada <u>variable</u> te un <u>domini</u> i un conjunt <u>d'etiquetes</u>.

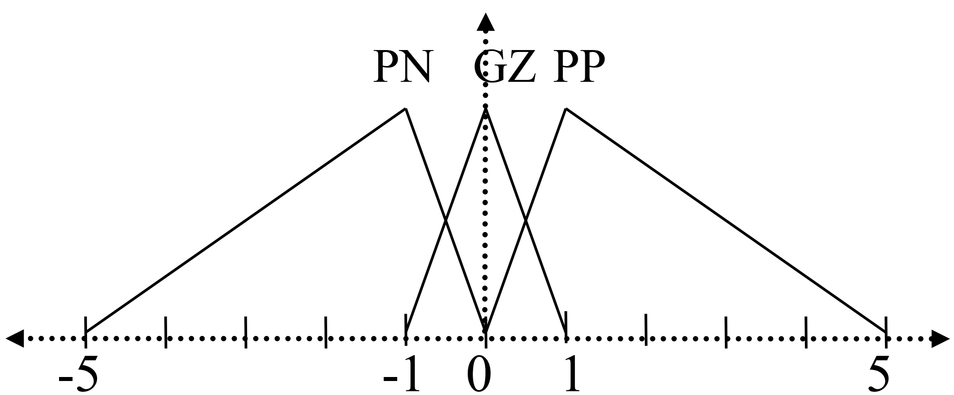
· Cada <u>etiqueta</u> té una <u>funció característica</u> definida sobre el seu domini.

Representació pràctica de conjunts difusos (5)



Variació de la Temp.

- [ΔT = Puja Molt]
- [ΔT = Puja Poc]
- [ΔT = Gairebé Igual]
- [ΔT = Baixa Poc]
- [ΔT = Baixa Molt]



Variable de Control

- [VC = Poc Positiva]
- [VC = Gairebé Zero]
- [VC = Poc Negativa]

Lògica difusa: connectives

Teoria de conjunts ≡ Lògica de Predicats

Extensió contínua ⇓ ⇓ Extensió contínua per isomorfisme

Teoria dels conjunts difusos ≡ Lògica difusa

⇓

Graduació dels valors de veritat clàssics: fals .... cert,
a l'interval continu [0,1] 0 1

Es defineixen les *connectives lògiques difuses* (operacions amb conjunts difusos) com a funcions contínues a l'interval [0,1], que generalitzen les connectives clàssiques:

Intersecció de conjunts ≡ $P \wedge Q$ ≡ T-norma (P,Q)
Unió de conjunts ≡ $P \vee Q$ ≡ T-conorma (P,Q)
Complement d'un conjunt ≡ $\neg P$ ≡ Funció de Negació (P)
Inclusió de conjunts ≡ $P \rightarrow Q$ ≡ Funció d'Implicació (P,Q)

Funció de Negació difusa / Complementari

"Funcions de Negació (forta)" $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$

- Propietats
  - $N(0) = 1$ i $N(1) = 0$ *condicions de contorn*
  - $N(p) \geq N(q)$ si $p \leq q$ *monotonia*
  - $N(N(p)) = p$ *involució*

- Exemples
  - $N(x) = 1-x$
  - $N_w(x) = (1-x^w)^{1/w}$ $\forall\, w > 0$ *Familia Yager*
  - $N_t(x) = (1-x) / (1+t*x)$ $\forall\, t > -1$ *Familia Sugeno*

Conjunció difusa / Intersecció

"T-Normes" $\mathbf{T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]}$

- Propietats
  - $T(p,q) = T(q,p)$ *commutabilitat*
  - $T(p,T(q,r)) = T(T(p,q),r)$ *associativitat*
  - $T(p,q) \leq T(r,s)$ si $p \leq r \wedge q \leq s$ *monotonia*
  - $T(0,p) = T(p,0) = 0$ *element absorbent*
  - $T(1,p) = T(p,1) = p$ *element neutre*

- Exemples
  - $T(x,y) = \text{mín}(x,y)$ *mínim*
  - $T(x,y) = x*y$ *producte algebraic*
  - $T(x,y) = \text{màx}(0, x+y-1)$ *diferència fitada*
  - $T(x,y) = x*y / (x+y-x*y)$

Disjunció difusa / Unió

"T-Conormes" $\mathbf{S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]}$

- Propietats
  - $S(p,q) = S(q,p)$ *commutabilitat*
  - $S(p,S(q,r)) = S(S(p,q),r)$ *associativitat*
  - $S(p,q) \leq S(r,s)$ si $p \leq r \wedge q \leq s$ *monotonia*
  - $S(0,p) = S(p,0) = p$ element neutre
  - $S(1,p) = S(p,1) = 1$ element absorbent
- Exemples
  - $S(x,y) = \text{màx}\,(x,y)$ *màxim*
  - $S(x,y) = x+y-x*y$ *suma algebraica*
  - $S(x,y) = \text{mín}\,(x+y,1)$ *suma fitada*
  - $S(x,y) = (x+y -2x*y) / (1-x*y)$

Dualitat entre T-normes i T-conormes / Unió i intersecció

Les T-normes i T-conormes següents són duals segons les lleis de De Morgan:

$N(T(x,y)) = S(N(x),N(y))$
$N(S(x,y)) = T(N(x),N(y))$

- $T(x,y) = \text{mín}\ (x,y)$ $\quad$ $S(x,y) = \text{màx}\ (x,y)$
- $T(x,y) = x*y$ $\quad$ $S(x,y) = x+y - x*y$
- $T(x,y) = \text{màx}\ (0, x+y-1)$ $\quad$ $S(x,y) = \text{mín}\ (x+y,1)$
- $T(x,y) = x*y / (x+y-x*y)$ $\quad$ $S(x,y) = (x+y -2x*y) / (1-x*y)$

Connectives difuses sobre el mateix univers (1)

Si $F \equiv [X \text{ és } A]$ i $G \equiv [X \text{ és } B]$ amb distribucions de possibilitat Π_A i Π_B definides sobre el mateix univers U

$\Downarrow$

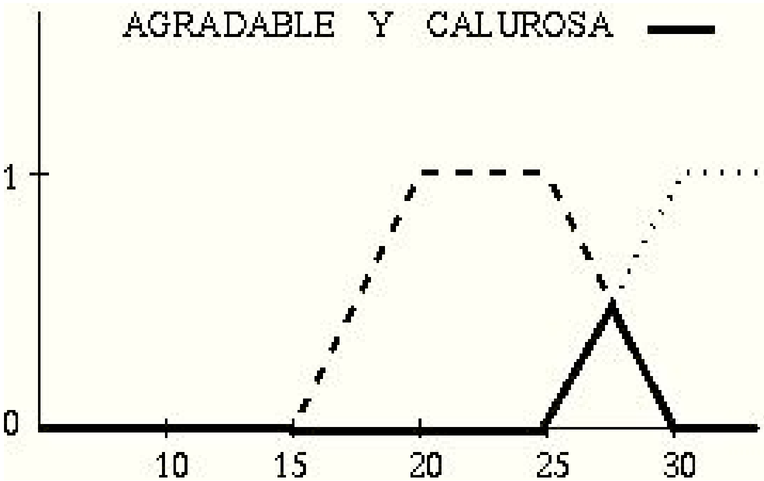
$F \wedge G \equiv [X \text{ és } A \wedge B]$ amb $\Pi_{A \wedge B}(u) = T(\Pi_A(u), \Pi_B(u))$ T-norma

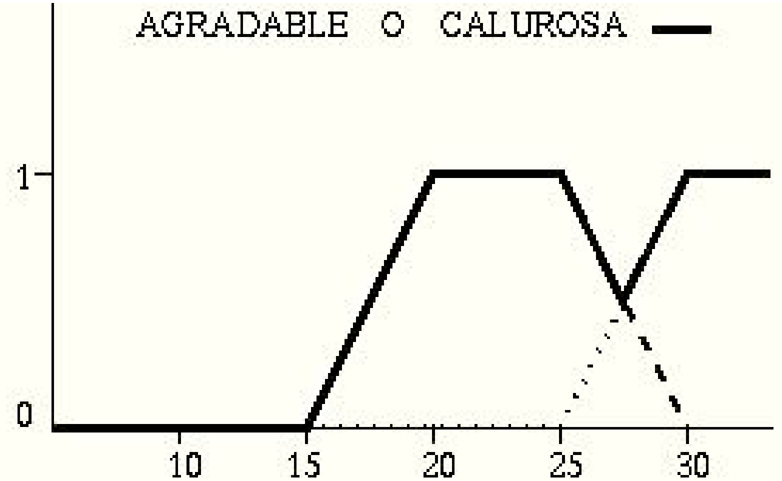
$F \vee G \equiv [X \text{ és } A \vee B]$ amb $\Pi_{A \vee B}(u) = S(\Pi_A(u), \Pi_B(u))$ T-conorma

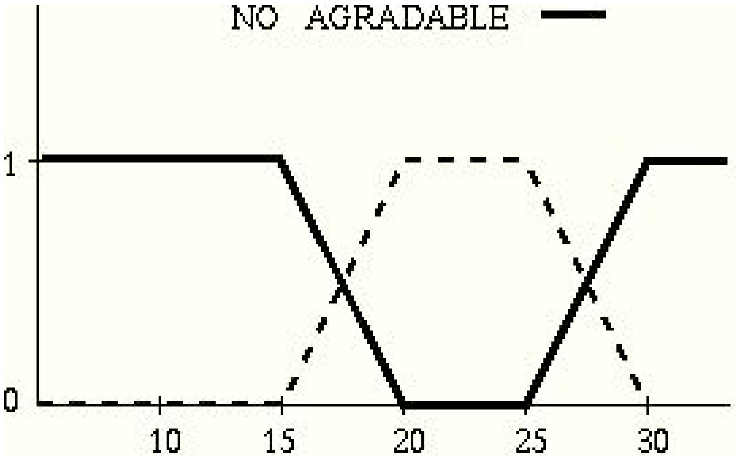
$\neg F \equiv [X \text{ és } \neg A]$ amb $\Pi_{\neg A}(u) = N(\Pi_A(u))$ Funció de Negació

(Funcions d'una mateixa dimensió)

Connectives difuses sobre el mateix univers (2)







Connectives difuses sobre diferents universos (1)

Si F ≡ [X és A] i G ≡ [Y és B] amb distribucions de possibilitat Π_A definida sobre U i Π_B definida sobre V, $U \neq V$

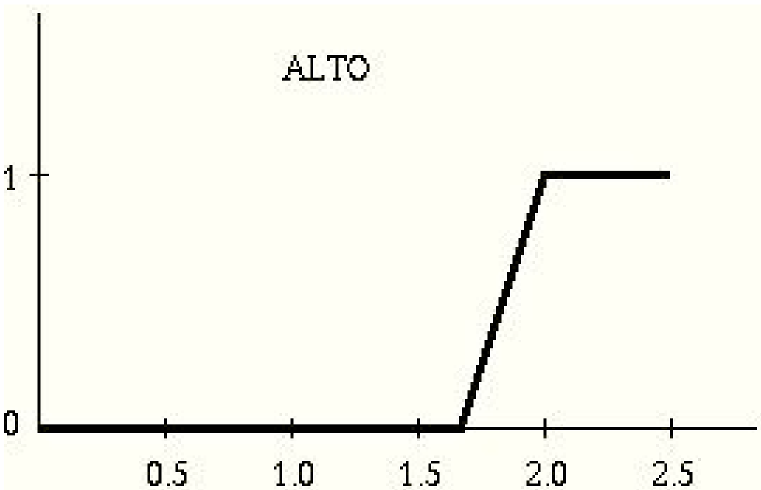
$\Downarrow$

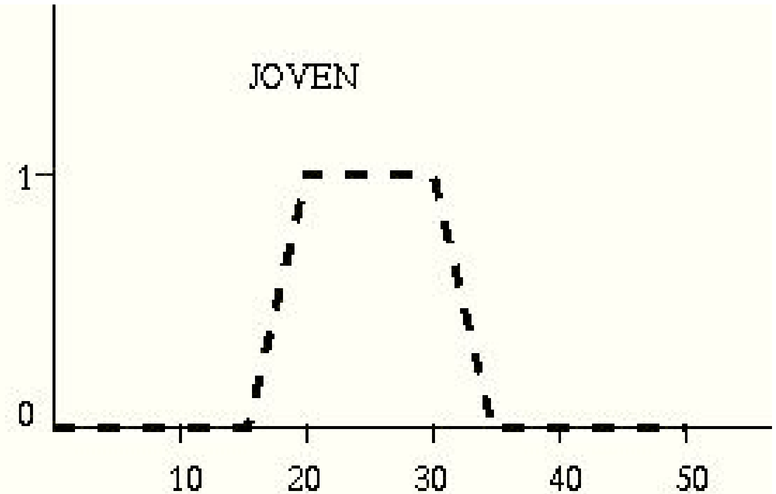
F ∧ G ≡ [X és A] ∧ [Y és B] amb $\Pi_{A \wedge B}(u,v) = T(\Pi_A(u), \Pi_B(v))$ T-nor.

F ∨ G ≡ [X és A] ∨ [Y és B] amb $\Pi_{A \vee B}(u,v) = S(\Pi_A(u), \Pi_B(v))$ T-con.

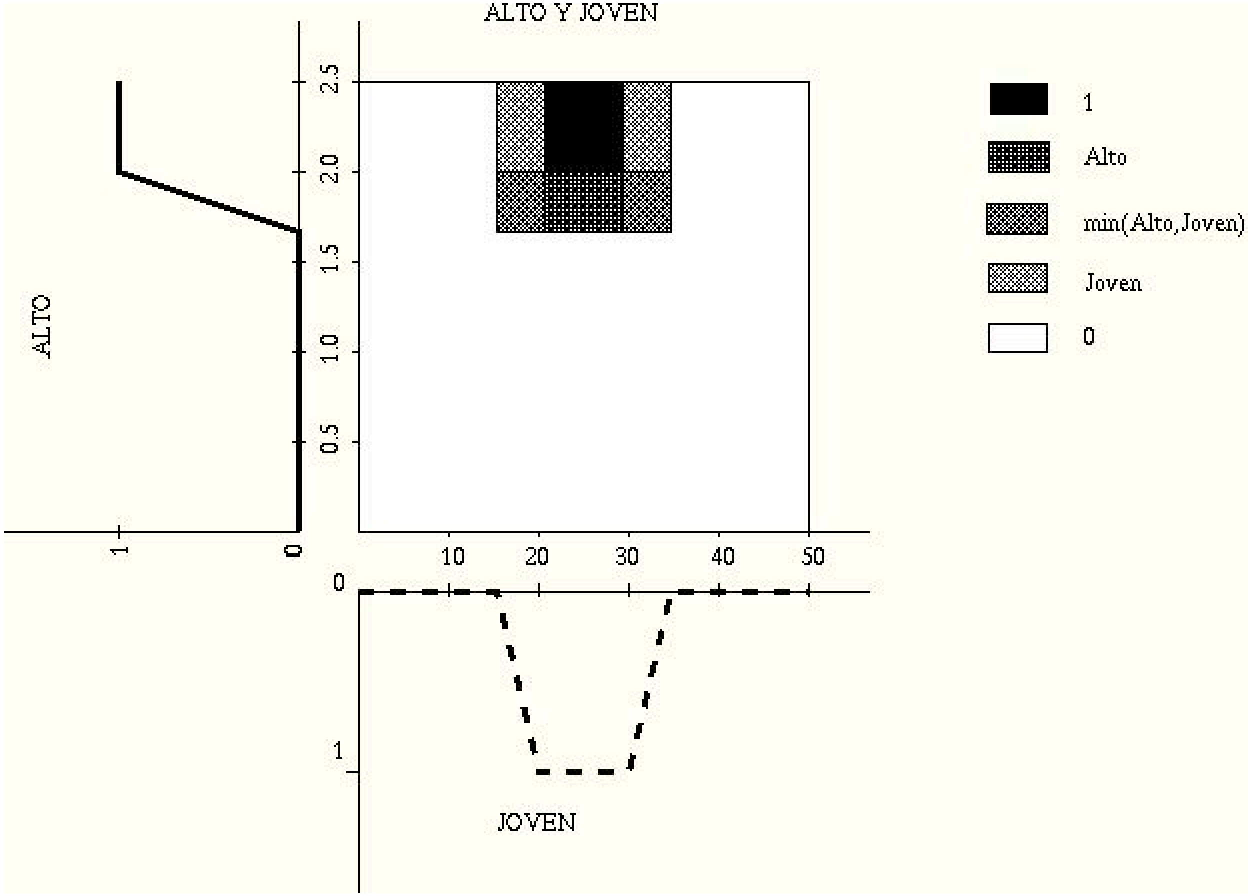
(Funcions de dues dimensions diferents)

Connectives difuses sobre diferents universos (2)

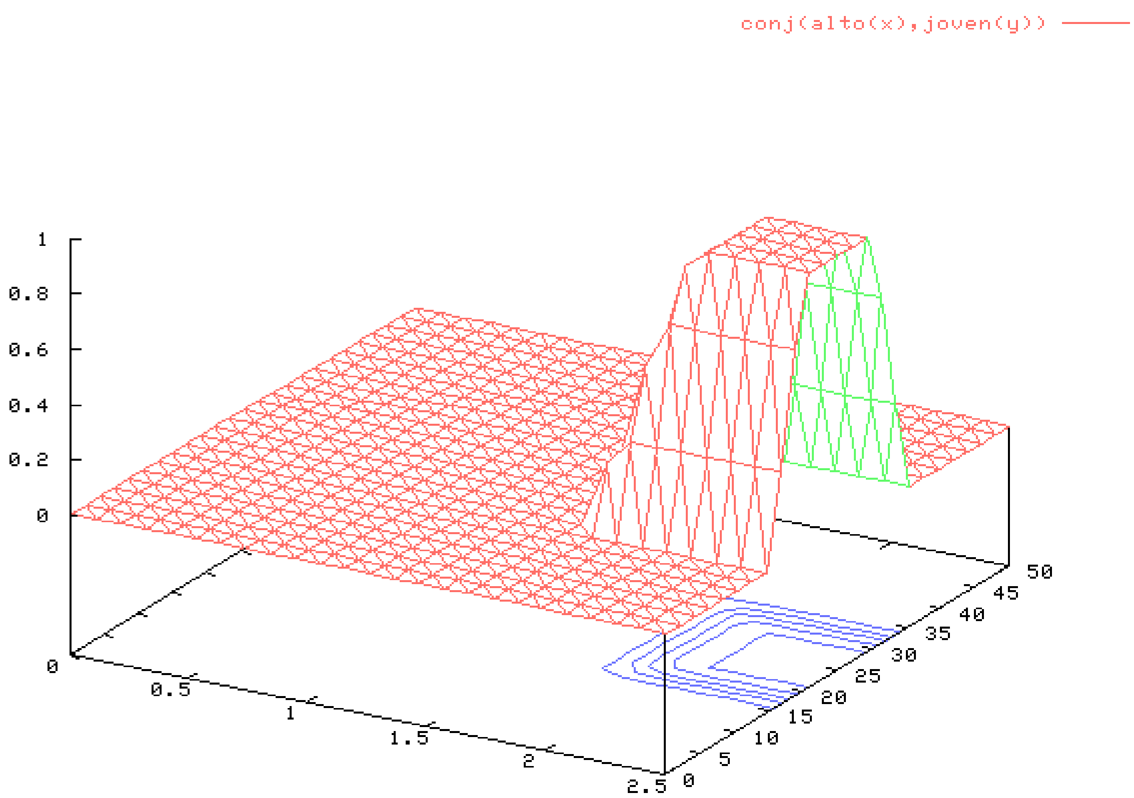




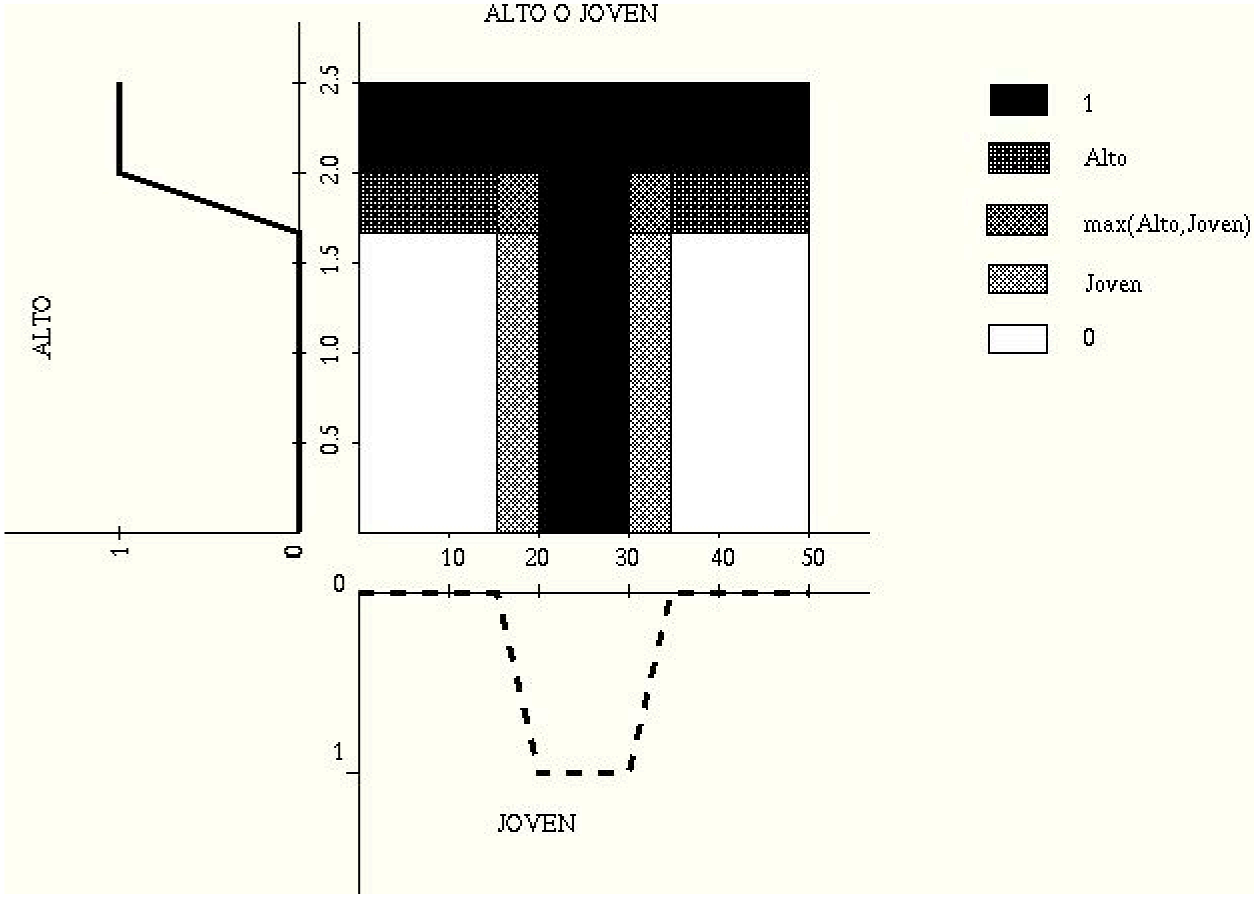
Connectives difuses sobre diferents universos: conjunció (1)



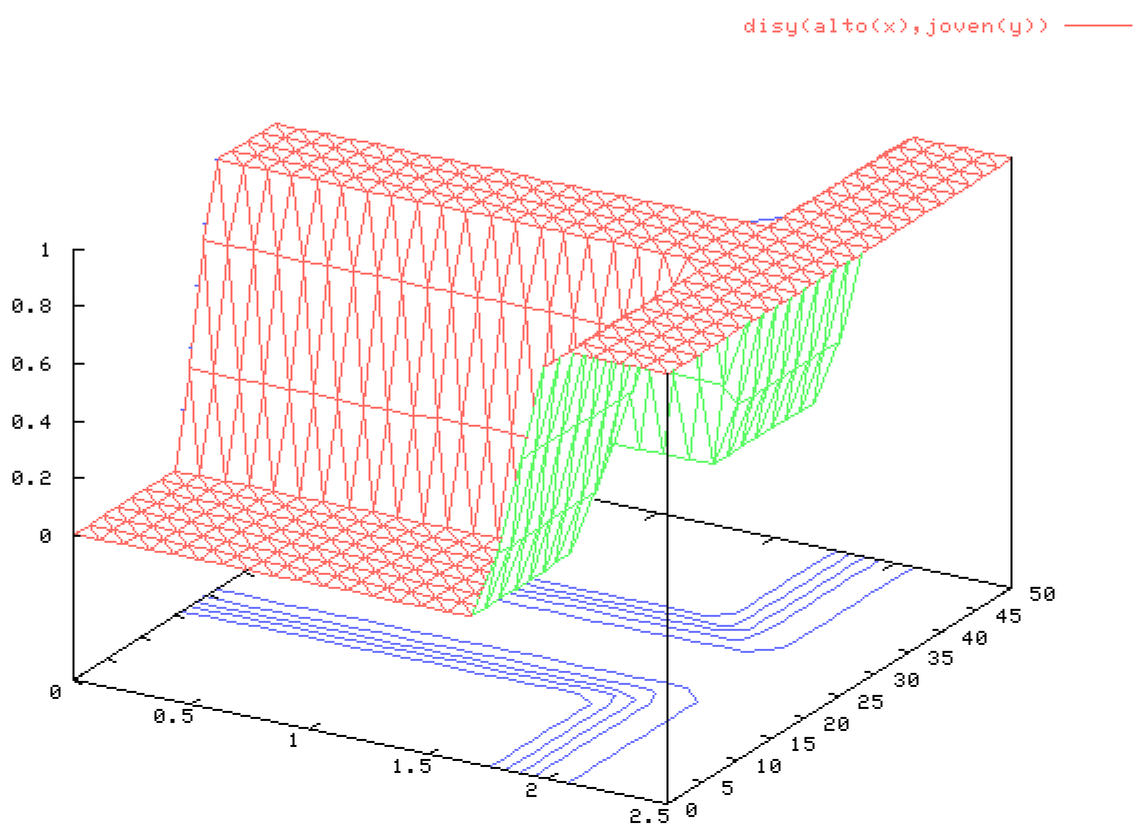
Connectives difuses sobre diferents universos: conjunció (2)



Connectives difuses sobre diferents universos: disjunció (1)



Connectives difuses sobre diferents universos: disjunció (2)



Inferència difusa amb dades precises

- Tenim una base de regles on els àtoms son etiquetes difuses [X = A]

R1: Si T = MC **i** ΔT = PM **llavors** VC = PN

R2: Si T = C **i** ΔT = PM **llavors** VC = PN

R3: Si T = MC **i** ΔT = PP **llavors** VC = PN

R4: Si T = A **i** ΔT = PP **llavors** VC = GZ

- Volem fer inferència amb una **combinació de vàries regles**:
  - a partir de valors concrets del domini per algunes variables (les d'alguns antecedents);
  - combinant la vaguetat/imprecisió d'acord amb les regles i la interpretació de les connectives.

temperatura

- [Gelada]
- [Molt Freda]
- [Freda]
- [Fresca]
- [Agradable]
- [Calenta]
- [Molt Calenta]

Inferència difusa amb dades precises
Connectives

- Interpretació de connectives:
  - Negació = Complementari (N)
  - Conjunció = Intersecció difusa = T-normes (T)
  - Disjunció = Unió difusa = T-conormes (S)

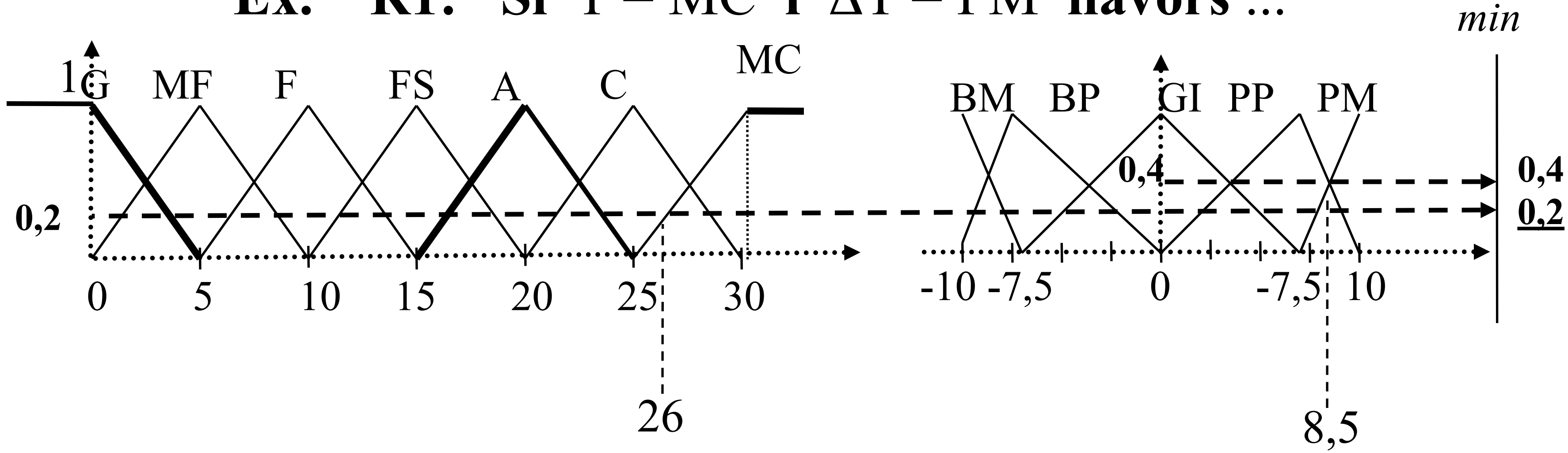
Inferència difusa amb dades precises
Fases

1. Avaluació de l'antecedent de les regles
2. Avaluació de les conclusions de les regles
3. Combinació de les conclusions de les regles
4. Nitidificació (pas de conjunt difús a valor precís)

Inferència difusa amb dades precises
Fase 1: Avaluació de l'antecedent de les regles

Es calcula el grau de pertinença per cada parell variable-etiqueta de l'antecedent i la combinació segons la interpretació de les connectives.

Ex. R1: Si T = MC **i** ΔT = PM **llavors** ...



Inferència difusa amb dades precises
Fase 2: Avaluació de les conclusions de les regles

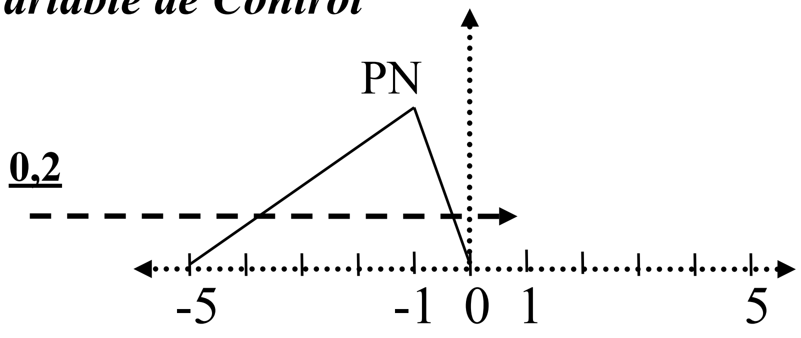
- Trunquem el conjunt difús de la conclusió amb el valor provinent de calcular l'antecedent.

variable de control

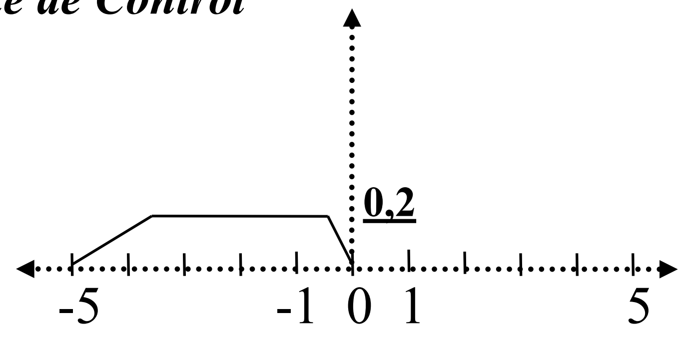
- [Poc Positiva]
- [Gairebé Zero]
- [Poc Negativa]

R1. Si ...	**llavors** VC = PN

Variable de Control

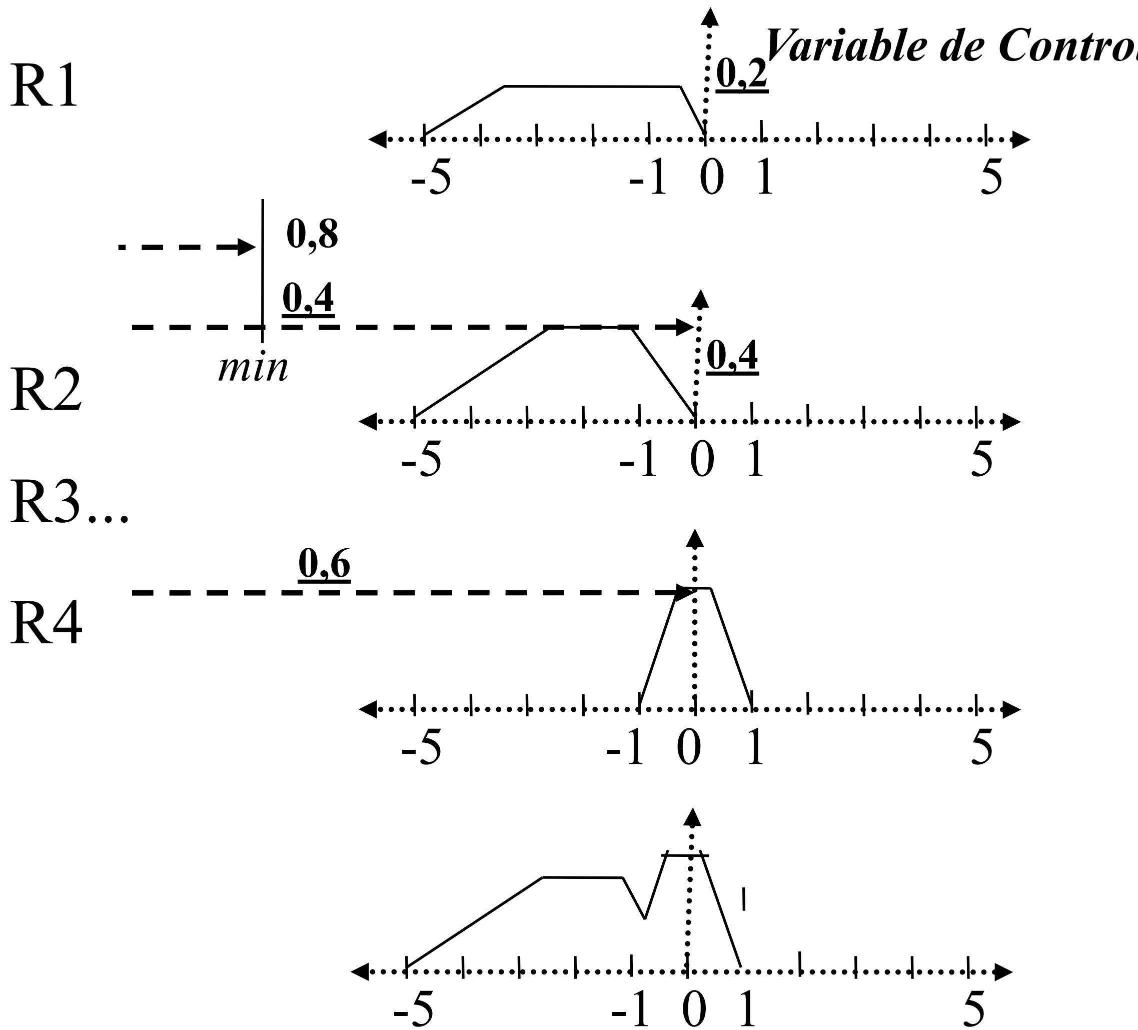


Variable de Control



Inferència difusa amb dades precises
Fase 3: Combinació de les conclusions de les regles

Es combinen disjuntivament.

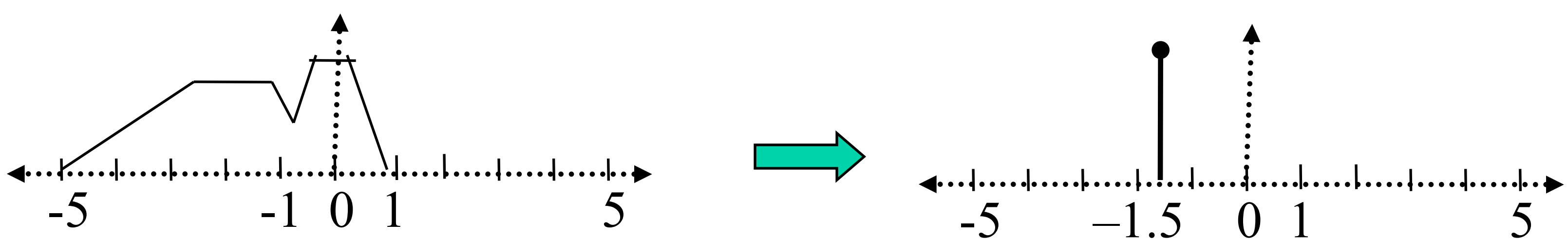


Inferència difusa amb dades precises

Fase 4: Nitidificació (defuzzification)

- Nitidificació (pas de conjunt difús a valor precís)

$$\frac{\sum_{x \in \mathbf{D}} \mu(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}}{\sum_{x \in \mathbf{D}} \mu(\boldsymbol{x})}$$



Inferència difusa amb dades difuses

Tenim una base de regles on els àtoms son etiquetes difuses [X = A]

Si Temperatura = Agradable … **llavors** Gir = Una mica a la dreta

- Volem fer inferència:
  - amb encadenament cap endavant;
  - a partir d'etiquetes difuses per les variables.

Inferència difusa amb dades difuses
Fases

1. Avaluació de la relació expressada en cada regla (*grau o funció d'implicació*)

$$\mu_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

2. Avaluació de la funció de pertinença de l'antecedent

$$\mu_A(\boldsymbol{x})$$

3. Composició inferencial *(Modus ponens)* de la implicació i l'antecedent

$$\mu_{CI}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\mu_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \mu_A(\boldsymbol{x}))$$

Inferència difusa amb dades difuses

Funcions d'implicació, $\mathbf{I : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]}$

- Propietats
  - $I(p,q)$ és *creixent respecte a la primera variable* i *decreixent respecte a la segona variable*
  - $I(0,p) = 1$
  - $I(1,p) = p$
  - $I(p,I(q,r)) = I(q,I(p,r))$ (intercanvi d'antecedents)
- R-implicacions / S-implicacions
- S-implicacions
  - $a \rightarrow b = \neg a \vee b$
  - $I(x,y) = S(N(x),y)$
- Exemples de S-implicacions
  - $I(x,y) = \text{màx}\ (1-x,y)$
  - $I(x,y) = 1-x+x*y$
  - $I(x,y) = \text{mín}\ (1-x+y,1)$

Inferència difusa amb dades difuses
Modus ponens

Les inferències en lògica difusa utilitzen el modus ponens com a regla bàsica:

Si [X és A] **llavors** [Y és B]
[X és A]
____
[Y és B]

La combinació de funcions de possibilitat es realitza mitjançant la funció generadora de modus ponens.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:
a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $\mathrm{mod}(u, \mathrm{imp}(u, v)) \leq v$

b) $\mathrm{mod}(1, 1) = 1$

c) $\mathrm{mod}(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow \mathrm{mod}(u, w) \leq \mathrm{mod}(v, w)$

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

a) La funció mod() té com a cota superior la certesa del conseqüent.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d’implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d’inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d’un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

a) La funció mod() té com a cota superior la certesa del conseqüent.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

b) Aquest és el límit booleà del modus ponens conseqüent.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

b) Aquest és el límit booleà del modus ponens conseqüent.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

c) D'un antecedent completament fals es pot concloure qualsevol cosa.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

c) D'un antecedent completament fals es pot concloure qualsevol cosa.

Modus ponens

Emprant algunes de les definicions anteriors d'implicació i el modus ponens, és possible definir el procés d'inferència difusa:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Donades les certeses d'un antecedent i de la implicació, la determinació de la certesa del conseqüent es realitza en base a una funció generadora del modus ponens que denominem mod().

La funció mod() té una sèrie de propietats, algunes de les quals són les següents:

a) $mod(u, imp(u, v)) \leq v$

b) $mod(1, 1) = 1$

c) $mod(0, u) = v$

d) $u \leq v \Rightarrow mod(u, w) \leq mod(v, w)$

d) La funció mod() ha de ser monòtona creixent amb la certesa de l'antecedent.

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

$$impl(u,v)=\max(1-u,v) \;\Rightarrow\; \mathrm{mod1}(u,v)=\begin{cases}0 & v\leq 1-u\\ v & v>1-u\end{cases}$$

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

$$imp1(u,v)=\max(1-u,v) \;\Rightarrow\; \mathrm{mod1}(u,v)=\begin{cases}0 & v\leq 1-u\\ v & v>1-u\end{cases}$$

$$imp2(u,v)=1-u+u*v \;\Rightarrow\; \mathrm{mod2}(u,v)=\begin{cases}0 & u=0\\ \max(u+v-1,0) & u>0\end{cases}$$

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

$$imp1(u,v)=\max(1-u,v) \;\Rightarrow\; \mathrm{mod1}(u,v)=\begin{cases} 0 & v\le 1-u \\ v & v>1-u \end{cases}$$

$$imp2(u,v)=1-u+u*v \;\Rightarrow\; \mathrm{mod2}(u,v)=\begin{cases} 0 & u=0 \\ \max(u+v-1,0) & u>0 \end{cases}$$

$$imp3(u,v)=\begin{cases} 1 & u\le v \\ v & u>v \end{cases} \;\Rightarrow\; \mathrm{mod3}(u,v)=min(u,v)$$

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

$$imp1(u,v)=\max(1-u,v) \Rightarrow \mathrm{mod1}(u,v)=\begin{cases}0 & v\le 1-u\\ v & v>1-u\end{cases}$$

$$imp2(u,v)=1-u+u*v \Rightarrow \mathrm{mod2}(u,v)=\begin{cases}0 & u=0\\ \max(u+v-1,0) & u>0\end{cases}$$

$$imp3(u,v)=\begin{cases}1 & u\le v\\ v & u>v\end{cases} \Rightarrow \mathrm{mod3}(u,v)=min(u,v)$$

$$imp4(u,v)=\begin{cases}1 & u\le v\\ \dfrac{v}{u} & u>v\end{cases} \Rightarrow \mathrm{mod4}(u,v)=u*v$$

Funciones generadoras del modus ponens que resultan de las definiciones de la función implicación presentadas anteriormente:

$$imp1(u,v) = \max(1-u,v) \;\Rightarrow\; \text{mod1}(u,v) = \begin{cases} 0 & v \le 1-u \\ v & v > 1-u \end{cases}$$

$$imp2(u,v) = 1-u+u*v \;\Rightarrow\; \text{mod2}(u,v) = \begin{cases} 0 & u = 0 \\ \max(u+v-1,0) & u > 0 \end{cases}$$

$$imp3(u,v) = \begin{cases} 1 & u \le v \\ v & u > v \end{cases} \;\Rightarrow\; \text{mod3}(u,v) = min(u,v)$$

$$imp4(u,v) = \begin{cases} 1 & u \le v \\ \dfrac{v}{u} & u > v \end{cases} \;\Rightarrow\; \text{mod4}(u,v) = u*v$$

$$imp5(u,v) = min(1-u+v,1) \;\Rightarrow\; \text{mod5}(u,v) = max(u+v-1,0)$$

Inferència difusa amb dades difuses
Generalització del modus ponens

La lògica difusa gaudeix de l'avantatge de poder fer inferències sense tenir exactament l'antecedent d'una regla:

Si [X és A] **llavors** [Y és B]
[X és A']

[Y és B']

S'ha de calcular com es modifica la conclusió, ja que no tenim el mateix antecedent de la regla. Això es fa mitjançant la transformació de la funció de possibilitat de A' en la de A

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B)
premisa: (x es A)

(y es B)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

$$\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$$

regla: si (x es A) entonces (y es B)
premisa: (x es A)

(y es B)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A) $\mu_p(x)$

(y es B)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla:	si (x es A) entonces (y es B)	$\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa:	(x es A)	$\mu_p(x)$
	(y es B)	$\mu_q(y)$

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A) $\mu_p(x)$

(y es B) $\mu_q(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A’ poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B)

premisa: (x es A’)

(y es B’)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A) $\mu_p(x)$

(y es B) $\mu_q(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A′ poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A′)

(y es B′)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa: (x es A) $\mu_p(x)$

(y es B) $\mu_q(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A’ poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa: (x es A’) $\mu_{p'}(x)$

(y es B’)

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa: (x es A) $\mu_{p}(x)$

(y es B) $\mu_{q}(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A' poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa: (x es A') $\mu_{p'}(x)$

(y es B') $\mu_{q'}(y)$

Todas estas expresiones son válidas para la realización de inferencia en casos análogos al siguiente:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A) $\mu_{p}(x)$

(y es B) $\mu_{q}(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A' poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$

premisa: (x es A') $\mu_{p'}(x)$

(y es B') $\mu_{q'}(y)$

$$\mu_{q'}(y) = \sup_{x} \left\{ \mathrm{mod}\left(\mu_{p'}(x), \mu_{p \rightarrow q}(x,y) \right) \right\}$$

regla: si (el coche es viejo) entonces (el coche es ruidoso)
premisa: (el coche es **bastante** viejo)

(el coche es **poco** ruidoso)

(y es B) $\mu_q(y)$

Y también en casos como el siguiente, donde A y A′ poseen la misma base de parámetros:

regla: si (x es A) entonces (y es B) $\mu_{p \rightarrow q}(x,y)$
premisa: (x es A′) $\mu_{p'}(x)$

(y es B′) $\mu_{q'}(y)$

$$\mu_{q'}(y) = \sup_x \left\{ \mathrm{mod}\left(\mu_{p'}(x), \mu_{p \rightarrow q}(x,y) \right) \right\}$$