El Problema de la Contratación en Permutaciones*

Margaret Archibald[1] and Conrado Martínez[2]**

[1] Dept. of Mathematics & Applied Mathematics, University of Cape Town, Rondebosch 7701, South Africa.margaret.archibald-at-uct.ac.za
[2] Dept. Llenguatges i Sistemes Informàtics, Universitat Politècnica de Catalunya, E-08034 Barcelona, Spain. conrado-at-lsi.upc.es

1 Introducción

El *problema de la contratación* ha sido recientemente propuesto por Broder *et. al.* [1] como un modelo simple de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, relacionado muy de cerca con el bien conocido *problema de la secretaria* (véase [2] y las referencias citadas por éste).

En el problema de la contratación, una compañía emergente entrevista candidatos de manera secuencial para su eventual contratación. En la formulación más simple del problema, el candidato entrevistado por la compañía durante el paso i tiene una puntuación Q_i, donde las Q_is son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con distribución $\mathrm{Unif}(0, 1)$. Entonces, de acuerdo con la estrategia de la compañía, el candidato i es, o bien contratado, o bien descartado. En el artículo de Broder *et. al.* se estudian dos estrategias naturales, las cuales, intuitivamente, deben llevar a un crecimiento de la calidad media de la plantilla, al tiempo que mantienen un razonable equilibrio con la velocidad a la que se realizan las contrataciones. La primera estrategia es *contratar por encima de la media* y la segunda estrategia es *contratar por encima de la mediana*. Como sus nombres indican, en contratar por encima de la media, un candidato es contratado si y sólo si su puntuación es al menos igual a la puntuación media de los candidatos contratados hasta el momento, mientras que en contratar por encima de la mediana un candidato es contratado si y sólo si su puntuación es al menos igual a la mediana de la puntuación de la plantilla actual. En el artículo mencionado también se consideran las estrategias *contratar por encima de un umbral* y *contratar por encima del mejor*, donde el candidato i es contratado si y sólo si $Q_i \geq \tau$ para un valor prefijado τ, ó $Q_i > \max\{Q_1, \dots, Q_{i-1}\}$, respectivamente.

* Esta investigación se ha realizado parcialmente mientras el segundo autor era visitante de la Univ. of Cape Town.

** Investigación financiada por el proyecto TIN2006-11345 (ALINEX) del Min. de Educación y Ciencia español.

En este resumen, presentamos una formulación alternativa del problema en términos puramente combinatorios; su virtud principal es que se posibilita la aplicación de una rica y vasta colección de técnicas procedentes del mundo de la Combinatoria. No afirmamos que nuestro modelo sea superior al modelo original, por el contrario, nuestro modelo complementa al original al aportar un punto de vista diferente que puede resultar muy útil en la investigación del problema de la contratación y sus muchas variantes naturales.

Considérese una permutación $\sigma : [1, \dots, n] \to [1, \dots, n]$. Dicha permutación se procesa de manera secuencial, y así, en el paso i, vemos la puntuación o medida de calidad del candidato i, que resulta ser $\sigma(i)$. Podemos pensar pues en $\sigma(i)$ como en el rango del candidato i; el mejor candidato de entre los n tendrá rango n, mientras que el peor tendrá rango 1. Bajo esta óptica, el modelo resulta muy natural (véase también los argumentos discutidos en [1]). No resulta tan natural tomar el valor $\sigma(i)$ como una medida absoluta de la calidad del candidato i. Por razones similares, si los valores Q_i del modelo orginal son vistos como rangos relativos, la elección de la distribución uniforme en $(0, 1)$ es perfectamente justificable; pero pensamos que es discutible tomar dichos valores como medidas absolutas de la calidad. Por ejemplo, en tal caso, podría ser más natural suponer que las Q_is son variables aleatorias i.i.d. con distribución $\mathcal{N}(\mu, v^2)$.

De vuelta al proceso de contratación, en el paso i, debemos decidir si el candidato i es contratado o no. La decisión debe tomarse exclusivamente en función de las puntuaciones vistas previamente $\sigma(1), \dots, \sigma(i)$, y el candidato i sólo puede ser contratado en el paso i, si lo es alguna vez. No se dispone de ninguna información sobre el futuro, incluyendo la longitud de la permutación σ. Si denotamos por $\mathcal{H}_i(\sigma)$ al conjunto de los candidatos (sus índices) contratados hasta el paso i durante el procesamiento de la permutación σ, entonces las reglas anteriores se pueden formular formalmente como sigue: 1) $\mathcal{H}_i(\sigma) \subseteq \{1, \dots, i\}$ (no se pueden contratar candidatos futuros); 2) $\mathcal{H}_i(\sigma) \setminus \{i\} = \mathcal{H}_{i-1}(\sigma)$ (no se pueden contratar candidatos pasados); y 3) $\mathcal{H}_i(\sigma) = \mathcal{H}_i(\sigma')$ para cualesquiera permutaciones σ y σ' si $\sigma(j) = \sigma'(j)$ para toda j, $1 \le j \le i$ (las decisiones deben tomarse sin conocimiento del futuro). La condición núm. 2 puede ser substituída por $\mathcal{H}_i(\sigma) \setminus \{i\} \subseteq \mathcal{H}_{i-1}(\sigma)$ si queremos incluir estrategias de despido, de manera que en cada paso, uno ó más de los empleados puede ser despedido.

Denominamos a $\mathcal{H}_n(\sigma)$ el *conjunto de contratación* de la permutación σ y simplificamos la notación como $\mathcal{H}(\sigma)$.

Una vez introducido el concepto de conjunto de contratación, algunas preguntas vienen inmediatamente a nuestra mente: su tamaño, que denotamos $h(\sigma)$, y otros parámetros como la media de las puntuaciones $A(\sigma) = (\sum_{i \in \mathcal{H}(\sigma)} \sigma(i))/h(\sigma)$, la dispersión (que es la diferencia entre la menor y la mayor puntuación), el número medio de pasos entre contrataciones sucesivas, etc. No obstante, en este breve resumen nos centraremos casi exclusivamente en el tamaño del conjunto de contratación.

Por supuesto, nuestro mayor interés se centra en el valor esperado de los parámetros considerados para permutaciones aleatorias. En particular, si h_n denota el tamaño del conjunto de contratación en una permutación aletoria de tamaño n, queremos hallar $\mathbb{E}\{h_n\}$.

Finalmente, queremos mencionar que nuestro modelo mantiene intacto todo el potencial para posibles extensiones y variaciones, y su generalización a multiconjuntos es inmediata y natural.

2 Estrategias simples

Consideremos en primer lugar la contratación por encima de un umbral τ. Entonces $\mathcal{H}_i(\sigma) = \{j \,|\, 1 \leq j \leq i \text{ y } \sigma(j) \geq \tau\}$, y $\mathcal{H}(\sigma) = \{1 \leq j \leq n \,|\, \sigma(j) \geq \tau\}$. Por lo tanto, el tamaño h_n del conjunto de contratación de cualquier permutación de tamaño n es $n+1-\tau$. En el régimen asintótico, es útil suponer que $\tau = \alpha \cdot n + o(n)$ para alguna $0 < \alpha \leq 1$, pues de otro modo prácticamente todos los candidatos entrevistados serían contratados. Entonces

$$\frac{\mathbb{E}\{h_n\}}{n} = \frac{n+1-\tau}{n} = 1 - \alpha + O(n^{-1}).$$

Por otro lado, si consideramos la puntuación media del conjunto de contratación tenemos

$$A(\sigma) = \frac{\sum_{j=\tau}^{n} j}{n+1-\tau} = \frac{n(n+1) - \tau(\tau-1)}{2(n+1-\tau)} = n\frac{1+\alpha}{2} + O(1),$$

para toda permutación σ de orden n. Puesto que $A(\{1, \ldots, n\}) = (n+1)/2$, la razón entre la puntuación media del conjunto de contratación y la puntuación media de la permutación al completo es

$$\frac{\mathbb{E}\{A_n\}}{(n+1)/2} = \frac{n(n+1) - \tau(\tau-1)}{(n+1)(n+1-\tau)} = 1 + \alpha + O(n^{-1}),$$

pero si dividimos $\mathbb{E}\{A_n\}$ por el factor de normalización n (compárese con [1]) obtenemos

$$\frac{\mathbb{E}\{A_n\}}{n} = \frac{n(n+1) - \tau(\tau-1)}{2n(n+1-\tau)} = \frac{1+\alpha}{2} + O(n^{-1}).$$

Otros parámetros de esta estrategia pueden ser calculados fácilmente y de manera similar.

Consideremos ahora la otra estrategia simple estudiada por Broder *et al.*, contratar por encima del mejor. En el modelo discreto, esta estrategia está relacionada con un parámetro bien conocido y muy bien estudiado en permutaciones aleatorias: los máximos de izquierda a derecha [4]. Un elemento $\sigma(i)$ se denomina máximo de izquierda a derecha si es mayor que los elementos precedentes, esto es, si $\sigma(j) < \sigma(i)$ para toda $j < i$. Obviamente, $\mathcal{H}(\sigma)$ es exactamente el conjunto de máximos de izquierda a derecha en σ. Es bien sabido que $\mathbb{E}\{h_n\} = \ln n + O(1)$, lo que implica que el tamaño del conjunto de contratación es exponencialmente menor que el conjunto de los candidatos entrevistados. No daremos aquí detalles adicionales sobre esta estrategia, ya que se trata de un caso particular (con $m = 1$) de la estrategia que analizamos en la sección 4.

3 Un marco general para estrategias basadas en el rango

En esta sección presentamos (sin demostración) algunos resultados generales sobre el tamaño del conjunto de contratación para las denominadas *estrategias basadas en el rango.*

Un estrategia basada en el rango es aquélla en la que todas las decisiones (contratar o descartar) se basan exclusivamente en el rango del candidato actual relativo a los rangos de los candidatos previamente entrevistados. Esto es, el valor real $\sigma(i)$ del candidato entrevistado no es relevante, lo que cuenta es la posición de éste entre los $i - 1$ candidatos previos. Este tipo de estrategias son muy naturales y modelizan adecuadamente muchas situaciones. Por ejemplo, en el problema de la secretaria estándar, se impone que las decisiones se tomen en función del rango relativo [2].

Dada una permutación σ de orden n y un índice i, $1 \leq i \leq n$, sea $\rho_i(\sigma)$ la permutación de orden i que se obtiene al reetiquetar el prefijo inicial de longitud i de σ de manera que se preserve el orden relativo. Por ejemplo, $\rho_1(25341) = 1$, $\rho_3(25341) = 132$ y $\rho_4(25341) = 1423$.

Definición 1 *Una estrategia de contratación está basada en el rango si y sólo si para cualquier permutación σ y cualquier i, $1 \leq i \leq |\sigma|$, se cumple que*

$$\mathcal{H}_i(\sigma) = \mathcal{H}(\rho_i(\sigma)).$$

Contratar por encima del mejor, por encima de la mediana y por encima del m-ésimo mejor (véase la sección 4) son estrategias basadas en el rango. Por el contrario, contratar por encima del umbral o por encima de la media no lo son. Nos concentraremos en las estrategias basadas en el rango en lo que resta de esta sección.

Para analizar el tamaño promedio del conjunto de contratación de una permutación aleatoria, comenzamos definiendo la siguiente función generatriz bivariada:

$$H(z,u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \frac{z^{|\sigma|}}{|\sigma|!} u^{h(\sigma)}, \tag{1}$$

donde $\mathcal{P}$ denota al conjunto de todas las permutaciones. Si tomamos las derivadas sucesivas de H respecto a u y hacemos $u = 1$ obtendremos las funciones generatrices de los sucesivos momentos de h_n. Por ejemplo

$$h(z) = \frac{\partial}{\partial u} H(z,u)\bigg|_{u=1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} h(\sigma) \frac{z^{|\sigma|}}{|\sigma|!}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}\{h_n\} = [z^n]h(z)$.

Dada una permutación σ de orden n y un valor j, $1 \leq j \leq n+1$, denotaremos mediante $\sigma \circ j$ a la permutación de orden $n+1$ que se obtiene al reetiquetar $j, j+1, \ldots, n$ como $j+1, \ldots, n+1$ y añadir j por el final. Por ejemplo, si $\sigma = 3241$ entonces $\sigma \circ 3 = 42513$, y si $\sigma = 213$ entonces $\sigma \circ 4 = 2134$.

Para toda estrategia basada en el rango tenemos que $h(\sigma) = 0$ si σ es la permutación vacía y $h(\sigma \circ j) = h(\sigma) + X_j(\sigma)$, donde

$$X_j(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si el último candidato de } \sigma \circ j \text{ es contratado,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $X(\sigma) = \sum_{1 \leq j \leq |\sigma|+1} X_j(\sigma)$, es decir, $X(\sigma)$ es el número de puntuaciones (relativas) tales que un candidato con dicha puntuación sería contratado inmediatamente después de procesar σ.

Nuestro primer teorema establece la ecuación satisfecha por $H(z,u)$.

Theorem 1. *Sea $H(z,u)$ la función generatriz definida en* (1) *y $X(\sigma)$ el número de valores j, $1 \leq j \leq |\sigma|+1$, tales que un candidato con puntuación j sería contratado si se le entrevista a continuación de σ. Entonces*

$$(1-z)\frac{\partial}{\partial z} H(z,u) - H(z,u) = (u-1) \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} X(\sigma) \frac{z^{|\sigma|}}{|\sigma|!} u^{h(\sigma)}. \tag{2}$$

Cada estrategia de contratación estará caracterizada por su correspondiente definición de $X(\sigma)$. Por poner un ejemplo simple, en la contratación por encima del máximo tenemos $X(\sigma) = 1$ para toda σ, ya que sólo hay una puntuación para la cual un candidato que sea entrevistado tras σ sería contratado, en concreto, cuando su rango relativo es $|\sigma| + 1$.

4 Contratar para la élite

En esta estrategia introducimos un nuevo parámetro m. El candidato i será contratado si su puntuación es mayor que la de alguno de los m mejores candidatos ya contratados. En otras palabras, si $E_{i-1}(\sigma)$ es el subconjunto de los m candidatos del conjunto de contratación con mejores puntuaciones antes del paso i y $\sigma(i)$ es mayor que la mínima puntuación en $E_{i-1}(\sigma)$ entonces i es contratado.

Obsérvese que i pasa entonces a formar parte de la "élite" de inmediato y que el elemento ℓ de mínima puntuación en $E_{i-1}(\sigma)$ es expulsado de la "élite", es decir, ℓ no forma parte de $E_i(\sigma)$. Afortunadamente para ℓ, sigue estando contratado :). Obsérvese también que esta estrategia se reduce a contratar por encima del máximo cuando $m = 1$.

En esta estrategia se cumple que $X(\sigma) = |\sigma|+1$ si $|\sigma| < m$, ya que cualquier candidato será contratado después de procesar σ puesto que la "élite" de m empleados no se ha formado todavía. Pero a partir de ahí, cuando $|\sigma| \geq m$ tenemos $X(\sigma) = m$. En efecto, si $|\sigma| \geq m$ entonces $h(\sigma) \geq m$ y un nuevo valor j será contratado tras σ si y sólo si es mayor que la menor puntuación de la élite. Puesto que la élite de σ tiene puntuaciones $n, n-1, \ldots, n-m+1$ tenemos exactamente m valores posibles para que el entrevistado sea contratado, en concreto, si $j \in \{n+1, \ldots, n-m+2\}$ entonces el último candidato de $\sigma \circ j$ será contratado.

Aplicando el Teorema 1 obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}(1-z)\frac{\partial}{\partial z}H(z,u) - (mu-m+1)H(z,u) = \\ (u-1)(1+2zu+\cdots+mz^{m-1}u^{m-1}) \\ - m(u-1)(1+zu+\cdots+z^{m-1}u^{m-1}). \quad (3)\end{aligned}$$

Para $m = 1$, esta ecuación diferencial se reduce a

$$(1-z)\frac{\partial}{\partial z}H(z,u) - uH(z,u) = 0,$$

cuya solución es

$$H(z,u) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^u = \sum_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 0}} c_{n,k}\frac{z^n}{n!}u^k,$$

al imponer la condición adicional de que $H(0,u) = 1$ y $H(z,1) = 1/(1-z)$. Los coeficientes $c_{n,k} = [z^n u^k]H(z,u)$ son los bien conocidos números de Stirling de primera especie sin signo [3], también denominados números de Stirling de ciclos (*Stirling cycle numbers*), y simbolizados mediante $\left[{n \atop k}\right]$. El número de Stirling de ciclos $\left[{n \atop k}\right]$ es el número de permutaciones de orden n que contienen exactamente k ciclos, número que coincide con el de permutaciones de orden n que tienen exactamente k máximos de izquierda a derecha.

La solución para m arbitrario es

$$H(z,u) = \frac{1}{(mu-m+1)\cdot(mu-m)\cdots(mu-1)}\left(\left(\frac{1}{1-z}\right)^{mu-m+1} P_m(z,u)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-z)^{m-1}}Q_m(z,u)\right),$$

donde $P_m(z,u)$ y $Q_m(z,u)$ son polinomios en z y u.

Si derivamos $H(z,u)$ respecto a u y fijamos $u=1$, obtenemos la función generatriz de los valores esperados

$$h(z) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\{h_n\}z^n = \frac{\partial}{\partial u}H(z,u)\bigg|_{u=1} = m\frac{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)}{1-z} - \frac{p_m(z)}{1-z},$$

donde $p_m(z)$ es un polinomio de grado $m-1$.

Por lo tanto $\mathbb{E}\{h_n\} = mH_n + O(1)$, siendo $H_n = \sum_{1\leq k\leq n}(1/k)$ el n-ésimo nuúmero armónico. Puesto que $H_n = \ln n + \gamma + O(n^{-1})$, donde $\gamma = 0.577\ldots$ es la constante gamma de Euler, concluímos que $\mathbb{E}\{h_n\} = m\ln n + O(1)$. En definitiva, el tamaño del conjunto de contratación es, para cualquier m fijo, exponencialmente menor que el total de candidatos entrevistados.

5 Contratar por encima de la mediana

Dado un conjunto de contratación $\mathcal{H}_i(\sigma)$, sea $\mathcal{H}_i(\sigma)[r]$ el elemento de $\mathcal{H}_i(\sigma)$ con la r-ésimo menor puntuación. Contratar por encima de la mediana significa que el candidato i es contratado si y sólo si $\sigma(i) > \mathcal{H}_{i-1}(\sigma)[r]$, donde $r = \lfloor (h_{i-1}(\sigma)+1)/2\rfloor$.

Puesto que sólo se tiene en cuenta el rango relativo de los candidatos en esta estrategia, no es muy difícil demostrar que si el conjunto de contratación tiene tamaño $k=2t$ en un momento dado, entonces hay $t+1$ rangos relativos posibles que serían contratados en el paso siguiente, mientras que si $k=2t+1$, nuevamente son $t+1$ los rangos relativos posibles que serían contratados. Es decir, tenemos $X(\sigma) = \lceil (h(\sigma)+1)/2\rceil$.

Los cálculos con el truncamiento $\lceil\cdot\rceil$ resultan inconvenientes, por lo que analizaremos las estrategias con $X'(\sigma) = (1+h(\sigma))/2$ y $X''(\sigma) = (3+h(\sigma))/2$, obteniendo de esta forma una cota inferior y una cota superior, respectivamente.

Por análogas razones, la contratación por encima de otros cuantiles, pongamos por caso, contratar por encima de $(1-a)h(\sigma)$, puede analizarse del mismo modo. En definitiva tendremos $X(\sigma) = \lceil a\cdot(h(\sigma)+1)\rceil$. En general, si $X(\sigma) = a\cdot h(\sigma)+b$ y $0<a<1$, tenemos

$$(1-z)\frac{d}{dz}h - (1+a)h = \frac{b}{1-z},$$

de manera que

$$(1-z)^{1+a}h = b\int \frac{dz}{(1-z)^a} = \frac{b}{a-1}(1-z)^{1-a} + C$$

y

$$h(z) = \frac{C}{(1-z)^{1+a}} - \frac{b}{a-1}\frac{1}{(1-z)^{2a}}.$$

Puesto que $h(0) = 0$ concluímos que $C = b/(a-1)$. Finalmente, puesto $1+a > 2a$ para $0 < a < 1$

$$[z^n]h(z) = \frac{b}{a-1}\frac{n^a}{\Gamma(-(1+a))}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

En particular, si $a = 1/2$ (contratar por encima de la mediana) tendremos $\mathbb{E}\{h_n\} = \Theta(\sqrt{n})$ y para "contrata A, mueve B" (véase [1]) tendemos que $a = 1-B/A$ y así $\mathbb{E}\{h_n\} = \Theta(n^{1-B/A})$. Informalmente, cuando el tamaño del conjunto de contratación llega a ser k, habremos entrevistado $n = \Theta(k^{A/(A-B)})$ candidatos (compárese con los resultados en [1]).

6 Conclusiones

En este breve resumen presentamos una formulación alternativa del problema de la contratación recientemente propuesto por Broder *et al.* [1] como modelo simple de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. Este modelo entronca con la rica área de la estadística de problemas de parada óptima, entre los cuales se encuentra el conocidísimo problema de la secretaria.

Nuestra formulación alternativa en términos de permutaciones posibilita la aplicación de una vasta colección de técnicas procedentes de la combinatoria para investigar este problema.

References

[1] A.Z. Broder, A. Kirsch, R. Kumar, M. Mitzenmacher, E. Upfal, and S. Vassilvitskii. The hiring problem and Lake Wobegon strategies. In *Proc. of the 19th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2008.

[2] P. R. Freeman. The secretary problem and its extensions: A review. *International Statistical Review*, 51:189–206, 1983.

[3] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 2nd edition, 1994.

[4] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms*, volume 1. Addison-Wesley, Reading, Mass., 3rd edition, 1997.