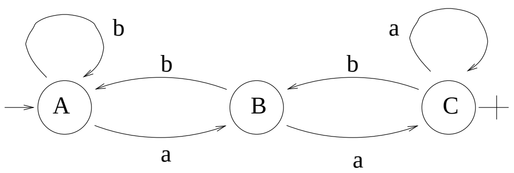
Parcial d'ALCC **10 de novembre de 2005**

Si us plau, lliureu els exercicis en fulls separats. Totes les respostes requereixen o bé una demostració formal o una justificació raonada, tret que s'indiqui el contrari.

Exercici 1 (3 punts) Considereu el DFA següent:



1. Trobeu les seqüències d'estats (camins de càlcul) de l'autòmat sobre els mots *aababa*, *bababa*, *aabaab* i *baabba*, i determineu si són o no acceptats.
2. Trobeu mitjançant el lema d'Arden una expressió regular que tingui com a llenguatge associat el reconegut per l'autòmat.
3. Descriviu informalment el llenguatge acceptat per l'autòmat i, a partir d'aquesta descripció, proposeu una expressió regular més senzilla que l'obtinguda abans.

Exercici 2 (2 punts) Trobeu una gramàtica incontextual que generi el llenguatge

$$\{a^i b^j c^k d^l \mid i + j = k + l\}$$

i raoneu la seva correctesa.

Exercici 3 (2 punts) Sigui $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una funció computable total estrictament creixent, és a dir, tal que per a tot i, j, si $i < j$ llavors $f(i) < f(j)$. Demostreu que, aleshores, existeix una màquina de Turing d'aturada segura que reconeix $\mathsf{Im}(f)$ (dit altrament, que $\mathsf{Im}(f)$ és recursiu).

Exercici 4 (3 punts)

1. Donat un llenguatge $L \subseteq \Sigma^*$, definim

$$\text{arrels}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists n \geqslant 0 \quad x^n \in L\}.$$

   Demostreu o refuteu les inclusions següents:

   (a) $L^* \subseteq \text{arrels}(L)^*$.

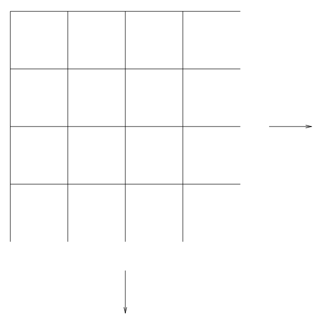
   (b) $\text{arrels}(L)^* \subseteq L^*$.

2. Considereu els llenguatges no regulars

$$X = \{a^{n^2} \mid n \geqslant 0\} \quad \text{i} \quad Y = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}.$$

   Són regulars els llenguatges arrels(X) i arrels(Y)? Per què o per què no?

3. Adaptem el model estàndard de TM perquè treballi amb una quadrícula en lloc d'una cinta. Com de costum, cada cel·la conté un símbol i la quadrícula és oberta en dues de les quatre direccions tal com mostra el dibuix:



   Proposeu com podria funcionar aquesta màquina i indiqueu si cal modificar el nombre de components del tuple que descriu formalment una TM i/o la definició d'algun dels seus components.

Exercici 1

1.
   - El mot *aababa* té el camí de càlcul $ABCBCBC \to$ **acceptat**
   - El mot *bababa* té el camí de càlcul $AABABAB \to$ **rebutjat**
   - El mot *aabaab* té el camí de càlcul $ABCBCCB \to$ **rebutjat**
   - El mot *baabba* té el camí de càlcul $AABCBAB \to$ **rebutjat**

2. Les equacions són:

   $$A = aB + bA$$
   $$B = aC + bA$$
   $$C = aC + bB + \lambda$$

   Resolent per Arden, tenim:

   $$A = b^*aB$$

   Per tant, $B = aC + b^+aB$. I aplicant Arden per segon cop, $B = (b^+a)^*aC$. Per últim,

   $$C = aC + b(b^+a)^*aC = (a + b(b^+a)^*a)^*.$$

   Ara, substituïm el valor de C en l'expressió que teníem per a B i obtenim

   $$B = (b^+a)^*a(a + b(b^+a)^*a)^*.$$

   Per tant,

   $$A = b^*a(b^+a)^*a(a + b(b^+a)^*a)^*.$$

3. És el llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot aa i, a la dreta de l'última aparició del grup aa, tota b va seguida immediatament per una a. Podem descriure aquest llenguatge amb l'expressió regular

   $$(a + b)^*aa(a + ba)^*.$$

Exercici 2

Sigui L el llenguatge de l'enunciat:

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i + j = k + l\}.$$

Un cas particular de mots que podríem generar fàcilment és quan $j = k$, perquè aleshores els mots de L són de la forma $a^i b^j c^j d^i$, i n'hi hauria prou amb produccions que generessin aquests mots "de dins cap enfora". En realitat, aquest cas només ens fa veure que pot ser útil comparar j i k, de manera que considerem els dos llenguatges següents:

$$L_1 = \{a^i b^j c^k d^l \mid i + j = k + l \wedge j \leqslant k\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j c^k d^l \mid i + j = k + l \wedge j \geqslant k\}$$

Clarament, $L = L_1 \cup L_2$. Definim gramàtiques per a L_1 i L_2 per separat, i així obtindrem la gramàtica de L fent-ne la reunió.

- L_1. Els mots de L_1 són de la forma $a^i b^j c^{j+n} d^l$. Però $i + j = j + n + l$, per tant $i = n + l$. Així, els mots són de la forma
$$a^{n+l} b^j c^{j+n} d^l = a^l a^n b^j c^j c^n d^l.$$
La segona expressió ens permet generar el mot de dins cap enfora amb la gramàtica
$$\begin{array}{lcl} S_1 & \to & aS_1d \mid X_1 \\ X_1 & \to & aX_1c \mid Y_1 \\ Y_1 & \to & bY_1c \mid \lambda \end{array}$$
- L_2. Els mots de L_2 són de la forma $a^i b^{j+j'} c^j d^l$. Com abans, deduïm que $l = i + n$, i els mots han de ser de la forma $a^i b^{j+n} c^j d^{i+n} = a^i b^n b^j c^j d^n d^i$. Per tant, es poden generar amb la gramàtica
$$\begin{array}{lcl} S_2 & \to & aS_2d \mid X_2 \\ X_2 & \to & bX_2d \mid Y_2 \\ Y_2 & \to & bY_2c \mid \lambda \end{array}$$

Per obtenir una gramàtica per a L, només cal afegir $S \to S_1 \mid S_2$ a les produccions anteriors i prendre S com a símbol inicial. Però si ens hi fixem, les dues subgramàtiques difereixen bàsicament en X_1 i X_2, de manera que podem simplificar la gramàtica final a:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSd \mid X_1 \mid X_2 \\ X_1 & \to & aX_1c \mid Y \\ X_2 & \to & bX_2d \mid Y \\ Y & \to & bY_2c \mid \lambda \end{array}$$

Exercici 3

Suposem que f compleix les condicions de l'enunciat. Volem una TM que decideixi

$$\mathsf{Im}(f) = \{y \mid \exists x \;\; f(x) = y\}.$$

Com que no es diu que f sigui exhaustiva, podria ser que algunes y no tinguessin antiimatge. Però el fet que f sigui creixent ens permet dissenyar un algorisme molt simple que, donada y, va comprovant les imatges dels naturals procedint en ordre des del 0. Si arribem a una imatge més gran que y, segur que ja no apareixerà més endavant (f és estrictament creixent).

```
entrada y
x := 0
mentre f(x) < y fer
    x := x + 1
fmentre
si f(x) = y llavors
    acceptar
si no
    rebutjar
fsi
```

Exercici 4

1. (a) Com que $x^1 = x$ per a tot mot x, és clar que tot mot és arrel de sí mateix. Per tant, $L \subseteq \text{arrels}(L)$ i, llavors, $L^* \subseteq \text{arrels}(L)^*$.

   (b) Només cal considerar $L = \{aa\}$. Aleshores,
   $$L^* = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\},$$
   és a dir, L^* conté les cadenes amb un nombre parell d'as. En canvi, com que a és una arrel del mot aa de L, tenim $a \in \text{arrels}(L)$ i, en fer el tancament de Kleene, obtenim $\text{arrels}(L)^* = \{a\}^*$. Hem trobat un contraexemple i, per tant, la inclusió és falsa en general.

2.
   - X. El llenguatge $\text{arrels}(X)$ conté totes les cadenes d'as que, elevades a un exponent, donen una cadena de la forma a^{n^2} per a algun n. Però tota cadena a^i ho compleix, perquè $(a^i)^i = a^{i^2} \in X$. Per tant, $\text{arrels}(X) = \{a\}^*$, que és regular.
   - Y. Per al llenguatge Y, considerem una arrel x d'un mot $w \in Y$. És a dir, suposem que $x^k = w$. Aleshores, $(|x|_a)^k = |w|_a$ i $(|x|_b)^k = |w|_b$. Per tant,
   $$|x|_a = \sqrt[k]{|w|_a} = \sqrt[k]{|w|_b} = |x|_b,$$
   i aleshores $x \in Y$. D'aquí deduïm que $\text{arrels}(Y) \subseteq Y$. L'altra inclusió la compleix tot llenguatge (apartat 1 (a) d'aquest exercici). Llavors, $\text{arrels}(Y) = Y$ i, per tant, no és regular.

3. El més senzill és que aquest model de TM tingui un sol capçal i el mogui una posició en cada transició, com es fa en el model estàndard, amb la diferència que, ara, podem considerar cinc moviments possibles (inclòs el *no moure*). Només hem de definir l'inici del càlcul. En lloc d'un sol símbol $\triangleright$ que indica l'inici de cinta, podem considerar-ne tres: $\otimes$ (en la casella de dalt a l'esquerra), ∇ (en tota la resta de la primera fila) i $\triangleright$ (en tota la resta de la primera columna). Aquests símbols serviran per detectar el final de quadrícula (i per saber en quina direcció no es pot moure el capçal). A més, a l'inici, podem considerar que l'entrada està escrita en la segona fila (a continuació del símbol $\triangleright$) i que la resta de la quadrícula conté el símbol blanc $\flat$. A banda d'aquests detalls no hi ha cap més diferència amb el model estàndard (i, a més, el model obtingut és equivalent a l'estàndard).

   Formalment, el tuple que descrivia la TM estàndard $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ és suficient per a aquest model, considerant que $\flat, \otimes, \triangleright, \nabla \in \Gamma$ i que $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{e, d, p, b, n\}$, on el conjunt $\{e, d, p, b, n\}$ descriu els cinc moviments possibles del capçal (esquerra, dreta, pujar, baixar, no moure).