Parcial d'ALCC **29 d'abril de 2005**

Si us plau, lliureu els exercicis en fulls separats. Totes les respostes requereixen o bé una demostració formal (si es demana) o una justificació raonada.

Exercici 1 (3 punts) Construïu el DFA mínim que reconeix els mots sobre $\{a, b\}$ que contenen almenys dues as (no necessàriament consecutives) i no contenen el submot bb.

Exercici 2 (2.5 punts) Construïu una gramàtica que generi el llenguatge següent:

$$L = \{a^{n_1}ba^{n_2}b\dots ba^{n_m} | \exists i, j\ : 1 \leqslant i < j \leqslant m : n_i = 2n_j\}.$$

Exercici 3 (2 punts) Demostreu que tot regular és incontextual. Per fer-ho, us podeu basar en resultats vistos a classe (com ara el tancament de les classes per diferents operacions).

Exercici 4 (2.5 punts) Respongueu raonadament les preguntes següents.

1. Pot ser regular la concatenació de dos no regulars?
2. Existeix algun llenguatge $L \subseteq \{a, b\}^*$ tal que $L = L \cdot \overline{L} \cup \{\lambda\}$?
3. Enuncieu la tesi de Church-Turing. Es tracta d'un teorema? D'una definició? D'una hipòtesi? O d'una tesi doctoral?
4. Definiu formalment el DFA que s'obté com a intersecció (mitjançant el producte cartesià) dels DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ i $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.
5. Quin llenguatge accepta una màquina de Turing de la forma $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_0)$? Quina funció computa?

Exercici 2 Com diu l'enunciat, els mots de L compleixen que, per a i, j amb $1 \leqslant i < j \leqslant m$, $n_i = 2n_j$. La gramàtica ha d'assegurar que, entre les cadenes d'as separades per bes, n'hi ha dues amb aquests exponents n_i i n_j. És a dir, que per a algun natural k, es compleix $n_i = 2k$ i $n_j = k$. Els mots del llenguatge tindran, doncs, la forma

$$xa^{2k}bya^kz$$

per a $x, y \in L((a^*b)^*)$ i $z \in L(ba^*)^*$. En primer lloc, definim un símbol A que permeti generar el llenguatge $\{a\}^*$:

$$A \to aA|\lambda$$

I un símbol Y que generi el llenguatge $L((a^*b)^*)$:

$$Y \to AbY|\lambda$$

La part central del mot, $w = a^{2k}bya^k$ serà generada pel símbol W:

$$W \to aaWa|bY$$

Només queda definir el símbol inicial S que pugui afegir x a l'esquerra i z a la dreta de w:

$$S \to AbS|SbA|X$$

Reunint totes les produccions, ens queda la gramàtica següent:

$$\begin{aligned}
&S \to AbS|SbA|X \\
&W \to aaWa|bY \\
&Y \to AbY|\lambda \\
&A \to aA|\lambda
\end{aligned}$$

Exercici 3 En els apunts.

Exercici 4

1. La concatenació de dos no regulars pot ser regular. Si A és un llenguatge no regular, per exemple, $A = \{0^n1^n | n \geqslant 0\}$, llavors $A \cup \{\lambda\}$ i $\overline{A} \cup \{\lambda\}$ no poden ser regulars. Per veure això, considerem que $A \cup \{\lambda\}$ fos regular. Si $\lambda \in A$, coincideix amb A (contradicció). Si no, A s'obtindria mitjançant una diferència de regulars

$$A = (A \cup \{\lambda\}) - \{\lambda\}$$

i, per tant, seria regular (contradicció). Com que $\overline{A}$ no és regular (pel tancament de REG per complementació), el mateix argument serveix per veure que $\overline{A} \cup \{\lambda\}$ tampoc no és regular.

Però la concatenació de tots dos (no regulars) és

$$(A \cup \{\lambda\}) \cdot (\overline{A} \cup \{\lambda\}) = (A \cdot \overline{A}) \cup A \cup \overline{A} \cup \{\lambda\} = \Sigma^*$$

que és regular.

2. Si existís, tindríem que $\lambda \in L$. Llavors, la part dreta de l'equació, substituïnt L per $\{\lambda\}$, ha d'estar inclosa en l'esquerra:

$$L \supseteq \{\lambda\} \cdot \overline{L} \cup \{\lambda\}$$

i, per tant, $\overline{L} \subseteq L$. Ara bé, l'únic llenguatge L sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que compleix la igualtat anterior és Σ^*, que no compleix l'equació de l'enunciat. Per tant, no existeix cap llenguatge que la compleixi.

3. L'autòmat intersecció de M_1 i M_2 es defineix com

$$M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$$

on $\delta : (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma \to Q_1 \times Q_2$ i es defineix, per a $p \in Q_1$, $q \in Q_2$ i $a \in \Sigma$ com

$$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a)).$$

4. La tesi de Church-Turing diu que la màquina de Turing és una formalització raonable del concepte d'algorisme. Se'n diu "tesi" però és més aviat una hipòtesi de treball (no demostrable matemàticament).

5. Com que, per la definició del model de màquina de Turing, no hi pot haver cap transició a partir de l'estat final, la funció de transició està sempre indefinida. La màquina s'atura immediatament per a tota entrada i, com que comença en l'estat final, accepta tota entrada. El llenguatge decidit és, doncs, Σ^*. Com que no modifica l'entrada i sempre s'atura, la funció computada és la identitat.