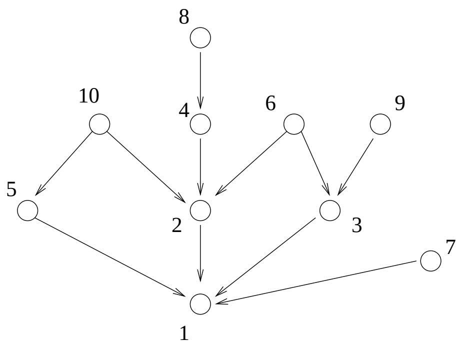
Si us plau, lliureu els exercicis en fulls separats. Totes les respostes requereixen o bé una demostració formal (si es demana) o una justificació raonada.

Exercici 1 (2.5 punts) Considereu el problema següent:

> Ordenació topològica (TS)
> Donat un graf $G = (V, A)$ dirigit acíclic, trobar una ordenació dels vèrtexs en la qual, per a tota aresta $(i, j) \in A$, el vèrtex i està a l'esquerra del vèrtex j.

A continuació es mostra la sortida corresponent a un graf d'entrada per al problema TS.

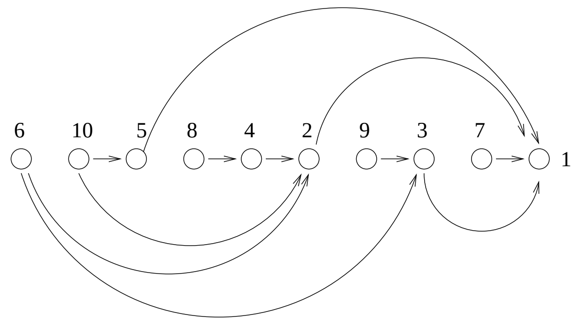
entrada



sortida

(6,10,5,8,4,2,9,3,7,1)

Fixeu-vos que l'ordenació obtinguda permet dibuixar el graf original de manera que totes les arestes vagin d'esquerra a dreta.



Proposeu un algorisme tan eficient com sigui possible per al problema anterior. Un cop obtingut, digueu si segueix alguna de les tècniques vistes al curs i analitzeu-ne el cost.

Exercici 2 (2.5 punts) Considereu el problema següent:

> Clique centrat (CC)
> Donat un graf no dirigit G, un natural k i un vèrtex u de G, determinar si G té un k-clique que conté u.

Recordeu que un k-clique és un subgraf complet de k vèrtexs i que el problema CLIQUE es defineix com:

> Subgraf complet (CLIQUE)
> Donat un graf no dirigit G i un natural k, determinar si G té un k-clique.

Volem demostrar que es compleix la reducció CLIQUE $\leqslant_m^p$ CC i considerem consecutivament tres funcions de reducció. Per a cadascuna d'elles, digueu si és correcta o no. En cas que ho sigui, demostreu-ho i, en cas que sigui incorrecta, digueu per què falla, a ser possible amb un contraexemple.

Suposeu que tenim un graf no dirigit $G = (V, A)$ i un natural k. Les transformacions són les següents.

(a) $f(G, k) = (G, k, v)$, on v és un dels vèrtexs de grau més alt de G.

(b) $g(G, k) = (G', k, w_1)$, on $G' = (V', A')$ consisteix en una còpia de G més un k-clique, és a dir, que per a k vèrtexs nous $w_1, \ldots, w_k \notin V$, es defineix
$V' = V \cup \{w_1, \ldots, w_k\}$ i
$A' = A \cup \{\{w_i, w_j\} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant k\}$.

(c) $h(G, k) = (G'', k+1, u)$, on u és un vèrtex nou ($u \notin V$) i $G'' = (V'', A'')$ es defineix com
$V'' = V \cup \{u\}$ i
$A'' = A \cup \{\{u, v\} \mid v \in V\}$.

Exercici 3 (2.5 punts) Contesteu les preguntes següents:

(a) Per què en la definició de TM hi apareixen dos alfabets? Quina diferència hi ha entre els dos i quina relació tenen?

(b) Definiu el concepte de conjunt enumerable i doneu (sense demostració) un exemple de conjunt enumerable i un de no enumerable.

(c) Descriviu les relacions entre les classes REG, P i RE mitjançant un gràfic o simbòlicament. Per a cada parell de classes diferents, doneu un llenguatge pertanyent a la diferència.

(d) Ordeneu els models de càlcul vistos a classe segons la seva potència de càlcul i identifiqueu els que reconeixen la mateixa classe de llenguatges. Els models són: DFA (autòmats finits deterministes), NFA (autòmats finits indeterministes), expressions regulars, CFG (gramàtiques incontextuals), DTM (màquines de Turing deterministes) i NTM (màquines de Turing indeterministes).

Exercici 4 (2.5 punts) Se sap que el llenguatge

$$\text{Buit}_{\text{TM}} = \{x \mid L(M_x) = \emptyset\}$$

no és recursiu. Podeu considerar que b és el número de Gödel d'una certa TM amb la propietat que $L(M_b) = \emptyset$. D'altra banda, suposeu que $A_0, A_1, A_2, \ldots$ és una enumeració de tots els DFA de manera semblant a com s'enumeren les TM; és a dir, que A_i representa el DFA codificat pel nombre i. Per tant, donada una codificació i, es pot recuperar el DFA corresponent A_i.

Demostreu, fent servir la informació anterior, si són o no recursius els llenguatges següents:

(a) $\text{Iguals}_{\text{TM}} = \{(x, y) \mid L(M_x) = L(M_y)\}$

(b) $\text{Iguals}_{\text{DFA}} = \{(x, y) \mid L(A_x) = L(A_y)\}$

....

Exercici 5 (optatiu) (2.5 punts)

(a) (0.5 punts) Funciona correctament l'algorisme que heu proposat en l'exercici 1 per al cas dels grafs dirigits generals? Si no, proposeu-ne un contraexemple.

(b) (0.5 punts) Es pot reduir el problema CC de l'exercici 2 al problema CLIQUE? Per què?

(c) (1 punt) Demostreu que el problema $\overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$ és enumerable recursivament.

(d) (0.5 punts) Fent servir el resultat anterior, demostreu que el problema Buit_{TM} no és enumerable recursivament.

Exercici 1

Es pot considerar l'algorisme següent: escriure (en qualsevol ordre) tots els vèrtexs amb grau d'entrada 0 (n'hi ha d'haver algun perquè el graf és acíclic); a continuació, eliminar les arestes que surten dels vèrtexs escrits, i repetir el procés fins que no quedin vèrtexs.

Si l'algorisme anterior escriu inicialment els vèrtexs amb grau d'entrada 0, la sortida, de moment, respecta l'ordenació topològica. Però en una iteració qualsevol també, ja que tots els vèrtexs que apuntaven als vèrtexs escrits en la iteració i-èssima, ja s'han escrit en les $i-1$ primeres iteracions. Per tant, la sortida és correcta i l'algorisme resol el problema TS. Com que l'algorisme pren la millor opció en cada moment i no revisa mai les decisions preses (de fet, en cada iteració ja dóna part de la sortida), es pot considerar que es tracta d'un algorisme voraç.

A continuació, escrivim l'algorisme en pseudocodi per tal d'analitzar-ne el cost. Representem amb n el nombre de vèrtexs del graf d'entrada.

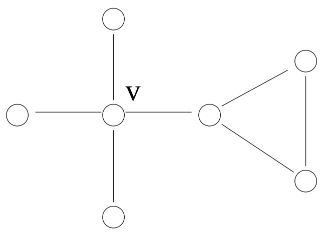
entrada $G = (V, A)$	
repetir	$O(n)$
$S \leftarrow \{v \in V \mid \nexists u \in V \quad (u, v) \in A\}$	$O(n^2)$
$V \leftarrow V - S$	$O(n)$
$A \leftarrow A - \{(u, v) \mid u \in S \ \wedge \ v \in V\}$	$O(n^2)$
escriure els elements de S en qualsevol ordre	$O(n)$
fins que $V = \emptyset$	

L'algorisme fa $O(n)$ iteracions, i cada iteració té cost $O(n^2 + n + n^2 + n) = O(n^2)$. El cost és, doncs, $O(n^3)$.

Els costos s'han donat considerant que G es representa mitjançant una matriu d'adjacència i que els conjunts de vèrtexs S i V es mantenen ordenats. D'aquesta manera, es pot calcular la diferència $V - S$ fent un recorregut lineal simultani dels dos conjunts ($O(n)$) i l'acutalització subsegüent del conjunt A es farà recalculant la matriu d'adjacència en la qual s'eliminen les files i columnes corresponents als vèrtexs del conjunt S. El nombre d'iteracions és com a màxim n perquè a cada iteració s'elimina almenys un vèrtex de V.

Exercici 2

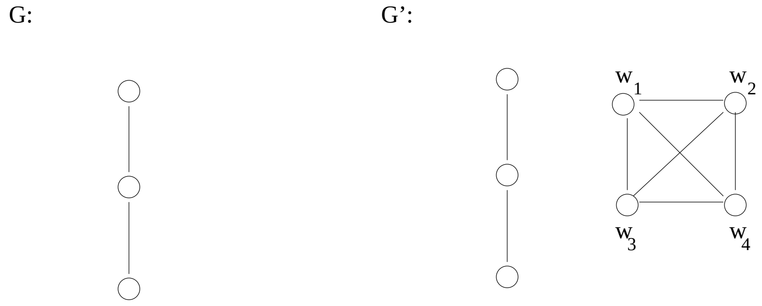
(a) És incorrecta. Es pot donar el cas que G tingui un k-clique, però que els vèrtexs de grau més alt de G no pertanyin al k-clique. Per exemple:



Si G és el graf de dalt, tenim $f(G,3) = (G,3,v)$. La funció f (per ser de reducció) hauria de complir que $x \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow f(x) \in$ CC, però amb $x = (G,3)$ no es compleix:

- d'una banda, tenim que $(G,3) \in$ CLIQUE (G té un 3-clique)
- però $(G,3,v) \notin$ CC (el 3-clique de G no està "centrat" en el vèrtex de grau màxim).

(b) És incorrecta. La funció g afegeix un k-clique a G com a nova component connexa, donant lloc a G'. Això assegura que G' tindrà un k-clique "centrat" en w_1 (que és un dels vèrtexs que defineixen el nou k-clique), però G pot tenir un k-clique o no, independentment del que compleixi G'. Per tant, qualsevol graf G que no contingui un k-clique servirà com a contraexemple:



Per al graf G de dalt, tenim que $(G,3) \notin$ CLIQUE mentre que $g(G,3) = (G',3,w_1) \in$ CC.

(c) És correcta. El graf G'' construït per la funció de reducció té un nou vèrtex u connectat a tots els de G. Això fa que $(G,k) \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow (G'', k+1, u) \in$ CC. Veiem-ho per parts:

(a) Suposem que $(G,k) \in$ CLIQUE. Llavors, G té un k-clique; suposem que els vèrtexs d'aquest k-clique formen el conjunt $U \subseteq V$. Llavors, els vèrtexs $U \cup \{u\}$ formen un $k+1$-clique a G'' que, evidentment, conté el vèrtex u. Per tant, $(G'', k+1, u) \in$ CC.

(b) Suposem ara que $(G'', k+1, u) \in$ CC. Llavors, G'' conté un $k+1$-clique que conté u. Si eliminem u d'aquest $k+1$-clique, s'obté un k-clique que està completament contingut en G. Per tant, $(G,k) \in$ CLIQUE.

Exercici 3

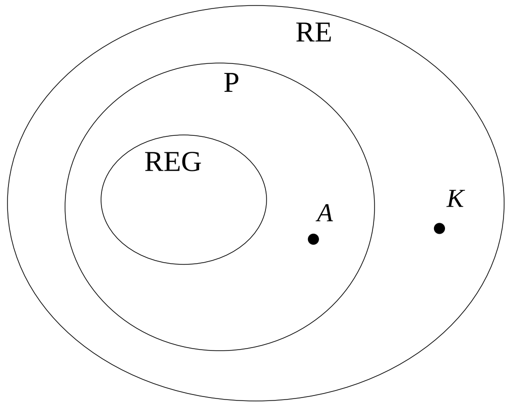
(a) Una màquina de Turing es descriu mitjançant un sèxtuple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$, on tant Σ com Γ són alfabets. L'alfabet Σ és el del llenguatge reconegut per la màquina i, per tant, l'entrada (escrita a la cinta en iniciar-se el càlcul) sempre pertany a Σ^*. En canvi, la TM pot utilitzar altres símbols, entre els quals hi ha el triangle inicial $\triangleright$ i el blanc $\flat$ (a part de possibles símbols addicionals); l'alfabet Γ conté tots els símbols que pot utilitzar la TM durant el càlcul. La relació entre els dos alfabets és $\Sigma \cup \{\triangleright, \flat\} \subseteq \Gamma$.

(b) Un conjunt A és enumerable si és finit o existeix una bijecció $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$. El mateix conjunt $\mathbb{N}$ és, per tant, enumerable. El conjunt de parts dels naturals, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, no és enumerable. Altres exemples d'enumerables: $\emptyset$, els parells, $\mathbb{Q}$, els quadrats perfectes o Σ^*. Altres exemples de no enumerables: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ o el conjunt de funcions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

(c) Les inclusions són $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{P} \subsetneq \mathsf{RE}$. El fet que siguin estrictes ve donat per l'existència de llenguatges a les diferències, per exemple:

- $A = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathsf{P} - \mathsf{REG}$. A teoria s'ha vist que no és regular, però és clarament reconeixible amb una TM en temps lineal (i, per tant, $A \in \mathsf{P}$).
- $K = \{x \mid M_x(x) \uparrow\} \in \mathsf{RE} - \mathsf{P}$. A teoria s'ha vist que $K \in \mathsf{RE}$ i que no és recursiu (per la qual cosa no pot pertànyer a P).

Gràficament, podem representar les relacions precedents amb els diagrames de Venn següents:



(d) De menor a major poder de càlcul:

- Els DFA, els NFA i les expressions regulars són tres models que corresponen a la classe REG dels llenguatges regulars.
- Les CFG corresponen a la classe CFL dels llenguatges incontextuals. És un model amb més potència de càlcul que els precedents perquè, per exemple, poden generar el llenguatge A descrit en l'apartat anterior (els mots de la forma $0^n 1^n$).
- Tant les DTM com les NTM reconeixen els llenguatges de la classe RE, els enumerables recursivament (les classes REC, EXP, NP i P apareixen com a resultat de certes restriccions en el funcionament del model general). Són models amb més potència de càlcul que les CFG perquè poden reconèixer llenguatges com ara K.

Exercici 4

(a) Fixem-nos que, donat un mot qualsevol x, es compleix que $x \in \mathrm{Buit}_{\mathrm{TM}}$ si i només si $L(M_x) = \emptyset$ (per la definició del conjunt $\mathrm{Buit}_{\mathrm{TM}}$), però aquesta igualtat és equivalent al fet que $L(M_x) = L(M_b)$ (ja que b s'ha triat convenientment perquè $L(M_b) = \emptyset$), que és equivalent a que $(x, b) \in \mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$ per la definició del problema $\mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$.

La propietat que acabem de veure ($\forall x \quad x \in \mathrm{Buit}_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow (x, b) \in \mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$) ens porta a definir la funció computable i total

$$f(x) = (x, b)$$

que, per tot el que hem observat fins ara, demostra la reducció $\mathrm{Buit}_{\mathrm{TM}} \leqslant_m \mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$. Un cop vista aquesta reducció, és clar que $\mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$ no pot ser recursiu. Si ho fos, pel tancament de REC per reduccions $\leqslant_m$, $\mathrm{Buit}_{\mathrm{TM}}$ també seria recursiu, i sabem que no ho és. Per tant, $\mathrm{Iguals}_{\mathrm{TM}}$ no és recursiu.

(b) Per al cas de $\mathrm{Iguals}_{\mathrm{DFA}}$, l'existència d'algorismes per obtenir un DFA mínim ens permet dissenyar una màquina de Turing M que correspondria a la següent descripció en pseudocodi:

> entrada (x, y)
> calcular l'autòmat mínim a partir de $A_x \longrightarrow \overline{A_x}$
> calcular l'autòmat mínim a partir de $A_y \longrightarrow \overline{A_y}$
> acceptar $\Leftrightarrow \overline{A_x} = \overline{A_y}$

En primer lloc, M és clarament una TM d'aturada segura, per les suposicions fetes en l'enunciat del problema (que A_i és calculable a partir de i) i pel fet que l'algorisme de minimització és també d'aturada segura. En segon lloc, el llenguatge acceptat per M és exactament $\mathrm{Iguals}_{\mathrm{DFA}}$ perquè sabem que l'autòmat mínim d'un llenguatge regular és únic. Per tant, si realment $(x, y) \in \mathrm{Iguals}_{\mathrm{DFA}}$, els llenguatges $L(A_x)$ i $L(A_y)$ coincideixen (per la definició del problema). Donat que, a més, el llenguatge $L(A_x) = L(A_y)$ és regular, ha de tenir un únic DFA mínim, que el trobarà la nostra màquina de Turing M. En direcció contrària, si M accepta, és perquè en minimitzar A_x i A_y ha arribat a un únic autòmat i, per tant, els llenguatges reconeguts han de ser el mateix.

Exercici 5

(a) Cap algorisme per al problema TS pot funcionar per a grafs cíclics perquè no és possible escriure els vèrtexs d'un cicle de manera lineal $v_1, \ldots, v_n$ sense que hi hagi cap aresta d'un vèrtex v_j a un vèrtex v_i amb $j > i$. Qualsevol graf dirigit cíclic serviria de contraexemple.

(b) El problema CC pertany a la classe NP: donada una entrada de CC (G, k, u) i un subconjunt $X \subseteq V(G)$ (candidat a ser un k-clique que conté u), es pot comprovar en temps polinòmic si realment X és un subgraf complet de k elements que conté u.

El fet que CC $\in \mathsf{NP}$ implica que CC es pot reduir en temps polinòmic a qualsevol NP-complet i, en particular, a CLIQUE.

(c) La TM següent accepta $\overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$.

entrada x
$t \leftarrow 1$
repetir
  simular $M_x(0), \ldots, M_x(t)$ durant t passos
  si $\exists t_0 \leqslant t \;\; M_x(t_0) \downarrow$ en $\leqslant t$ passos **llavors**
    acceptar
  fsi
  $t \leftarrow t + 1$
frepetir

Anomenem M a la TM anterior. Si M accepta x és perquè ha trobat un t_0 tal que $M_x(t_0) \downarrow$ i, per tant, $t_0 \in L(M_x)$. En aquest cas, $L(M_x) \neq \emptyset$ i, llavors, $x \in \overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$. En sentit contrari, si x pertany al conjunt anterior, llavors $L(M_x)$ conté algun element que la màquina M necessàriament trobarà, ja que simula M_x per a totes les entrades possibles i tots els temps de simulació possibles (només cal esperar que t tingui un valor prou alt). Per tant, $L(M) = \overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$.

(d) Es pot veure per reducció a l'absurd. Suposem que $\overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$ és enumerable recursivament. En aquest cas, tindríem que tant Buit_{TM} (per l'apartat (c) d'aquest exercici) com $\overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$ (per hipòtesi) serien e.r. Llavors, segons el teorema del complementari, Buit_{TM} seria recursiu, contradient el que es diu en l'enunciat de l'exercici 4. Per tant, $\overline{\text{Buit}_{\text{TM}}}$ no és e.r.